Procesos estocásticos

Contenidos adaptados del libro «Probabilidad y estadística para informáticos, segunda edición, M. Baron» (Capítulo 6)

Contenido

1. Objetivos
2. Definiciones y clasificaciones
   2.1 Definición de proceso estocástico
   2.2 Clasificación de los procesos estocásticos
3. Procesos de Markov y cadenas de Markov
   3.1 Cadenas de Markov
   3.2 Enfoque matricial
   3.3 Distribución estacionaria
4. Procesos de conteo
   4.1 Proceso binomial
   4.2 Proceso de Poisson
5. Resumen

1. Objetivos

- Familiarizarse con los conceptos y herramientas para manejar procesos estocásticos (RA5).
- Distinguir tipos de procesos estocásticos dependiendo de los instantes de observación y de los resultados observados (RA5).
- Conocer las propiedades básicas de las cadenas de Markov en tiempo Discreto (RA5).
- Clasificar los estados de las cadenas Markov (RA5).
- Conocer las propiedades y características más relevantes del Proceso de Poisson y de otros procesos en tiempo continuo (RA6).

2. Definiciones y clasificaciones

- 2.1 Definición de proceso estocástico
- 2.2 Clasificaciones de procesos estocásticos

2.1 Definición de *proceso estocástico*

- Un proceso estocástico es una variable aleatoria que también depende del tiempo.
- Por lo tanto, es una función con dos argumentos, $X(t, \omega)$
  - $t \in T$ es el tiempo, siendo T un conjunto de tiempos posibles, normalmente $[0,\infty)$, $(-\infty,\infty)$, $\{0, 1, 2, \ldots\}$, o $\{\ldots,-2,-1, 0, 1, 2, \ldots\}$
  - $\omega \in \Omega$ es el resultado de un experimento aleatorio, donde Ω es todo el espacio muestral.
- Los valores de $X(t, \omega)$ se denominan estados.
- Por simplicidad, normalmente no escribiremos ω como un argumento de $X(t, \omega)$
  - $X(t, \omega) = X(t)$

2.1 Definición de *proceso estocástico* Ejemplo 6.1 (Uso de CPU)

- El uso de la CPU de un ordenador es un proceso estocástico
- Observando el uso pasado de la CPU de un ordenador, podemos tener una realización de este proceso hasta el momento actual (Figura 6.1.a)
- Sin embargo, el comportamiento futuro del proceso no está claro, es un proceso aleatorio y puede desarrollarse de diferentes maneras o trayectorias (Figura 6.1b)

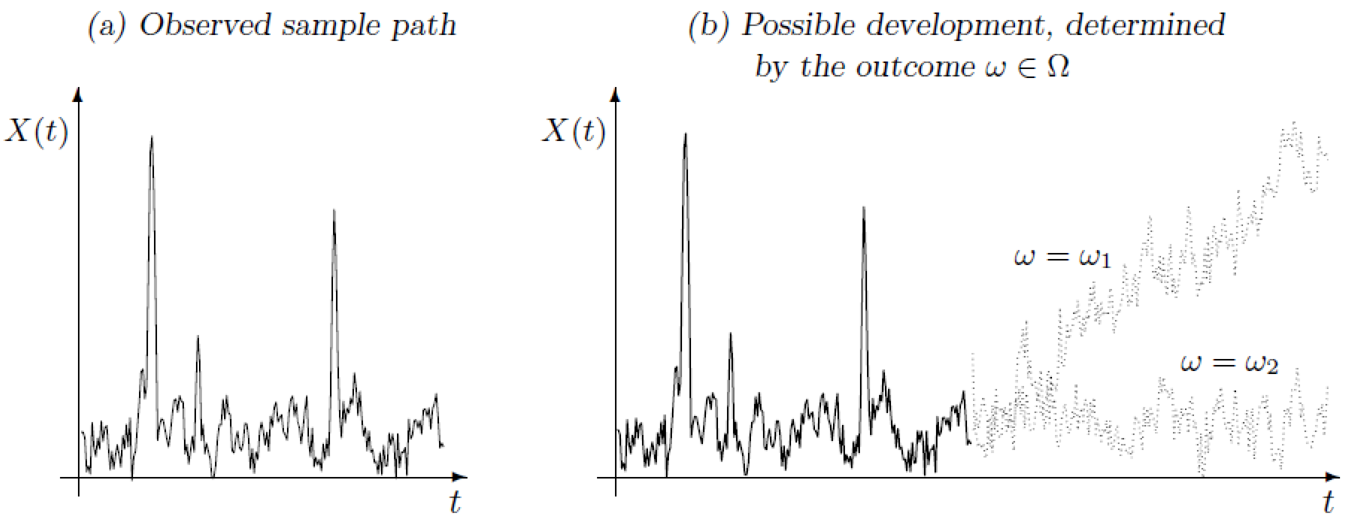


FIGURE 6.1: *Sample paths of CPU usage stochastic process.*

2.2 Clasificaciones de procesos estocásticos

- Clasificación según estado
  a) El proceso estocástico X(t, ω) es un **proceso de estado discreto** si la variable $X_t(\omega)$ es discreta para cada instante t.
  b) Se trata de un **proceso de estado continuo** si $X_t(\omega)$ es continua.

- Clasificación según el tiempo
  a) El proceso estocástico X(t, ω) es un **proceso de tiempo discreto** si el conjunto de intantes T es discreto, es decir, consiste en puntos separados y aislados.
  b) Es un **proceso** de **tiempo continuo** si T es continuo, posiblemente sin límites.

2.2 Clasificaciones de procesos estocásticos Ejemplos

- Ejemplo 6.2.
  - El proceso de uso de la CPU, en porcentajes, es un proceso de **estado continuo y tiempo continuo**.
- Ejemplo 6.3.
  - La temperatura del aire X(t, ω) en el instante t es un proceso de **estado continuo y tiempo continuo**.
  - Sin embargo, la temperatura Y (t, ω) registrada en una zona cada 10 minutos es un proceso de **tiempo discreto**. Además, dado que la temperatura registrada generalmente se redondea al grado más cercano, también es un proceso de **estado discreto**.
- Ejemplo 6.4.
  - En una imprenta, si X(n, ω) es la cantidad de tiempo necesaria para imprimir el n-ésimo trabajo, se trata de proceso de **tiempo discreto y estado continuo**, porque n = 1, 2, 3. . ., y X ∈ (0,∞).
  - Si Y (n, ω) es el número de páginas del trabajo de impresión n-ésimo, y por tanto Y puede tener valores 1, 2, 3…, se trata de un proceso de **tiempo discreto y estado discreto**.

3. Procesos de Markov y cadenas de Markov

- 3.1 Cadenas de Markov
- 3.2 Enfoque matricial
- 3.3 Distribución estacionaria (steady state)

3. Procesos de Markov y cadenas de Markov Definición

- Un proceso estocástico X(t) es de Markov si para cualquier $t_1 < ... < t_n < t$ y cualquier conjunto A; $A_1 . . . A_n$, se cumple:
  - $P\ \{X(t) \in A \mid X(t_1) \in A_1, . . . , X(t_n) \in A_n\} = P\ \{X(t) \in A \mid X(t_n) \in A_n\}$
- Significa que la distribución condicional de X(t) es la misma bajo dos condiciones diferentes:
  - (1) dadas observaciones del proceso X en varios momentos en el pasado;
  - (2) dada solo la última observación de X.
- Conociendo el presente, no usamos información del pasado:
  - *P {futuro | pasado, presente} = P {futuro | presente}*
- Entonces, para el desarrollo futuro de un proceso de Markov, sólo es importante su estado actual, y no importa cómo el proceso llegó a este estado.

3. Procesos de Markov y cadenas de Markov Ejemplo del proceso de Markov

- Ejemplo 6.5 (Conexiones a Internet).
  - X(t) es el número total de conexiones a Internet registradas por algún proveedor de servicios de Internet en el instante t.
  - Por lo general, las personas se conectan a Internet en momentos aleatorios, independientemente de cuántas conexiones ya se hayan hecho.
  - Por lo tanto, el número de conexiones en un minuto solo dependerá del número actual.
  - Por ejemplo, si se han registrado 999 conexiones a las 10:00, entonces su número total superará las 1000 durante el minuto siguiente, independientemente de cuándo y cómo se hicieron estas 999 conexiones en el pasado.
  - **Este proceso es de Markov.**

3. Procesos de Markov y cadenas de MarkovEjemplo de proceso no Markov

- Ejemplo 6.6 (Precios de stock).
  - $Y(t)$ es el valor de alguna acción o algún índice de mercado en el instante t.
  - Si conocemos $Y(t)$, ¿también necesitamos conocer $Y(t-1)$ para predecir $Y(t+1)$?
  - Se puede argumentar que si $Y(t-1) < Y(t)$, entonces el mercado está subiendo, y es probable (pero no seguro) que $Y(t+1)$ exceda $Y(t)$.
  - Por otro lado, si $Y(t-1) > Y(t)$, podemos concluir que el mercado está cayendo y podemos esperar $Y(t+1) < Y(t)$.
  - Parece que conocer el pasado además del presente nos ayuda a predecir el futuro.
  - **Este proceso no es de Markov.**

3.1 Cadenas de Markov

- Una cadena de Markov es un proceso estocástico de Markov de tiempo discreto y estado discreto.
  - El tiempo es discreto, así que podemos definir el conjunto de instantes de tiempo como T = {0, 1, 2. . .}.
  - Podemos considerar una cadena de Markov como una secuencia de variables aleatorias {X(0), X(1), X(2). . .}
  - El conjunto de estados también es discreto, así que enumeramos los estados como 1, 2. . . n.
  - Normalmente se comienza la enumeración desde el estado 0.
  - En algunos casos, el número de estados posibles es infinito ($n = \infty$).
  - En las cadenas de Markov sólo importa el valor de X(t) para predecir X(t+ 1)

3.1 Cadenas de Markov
Distribución de una cadena de Markov

- La distribución de probabilidad de una cadena de Markov es la función de masa de probabilidad de X(t)
  - $P_t(x) = P\{X(t) = x\}$ para $x \in \{1, 2, . . . , n\}$ y $t \in \{0,1, 2, . . . , \infty\}$
- La distribución inicial de una cadena de Markov es la función de masa de probabilidad de X(0)
  - $P_0(x) = P\{X(0) = x\}$ para $x \in \{1, 2, . . . , n\}$

3.1 Cadenas de Markov
Probabilidad de transición

- La probabilidad $p_{ij}(t)$ se llama **probabilidad de transición**
  - $p_{ij}(t) = P\{X(t+1) = j \mid X(t) = i\}$
  - Es la probabilidad de que la cadena de Markov X haga una transición del estado i al estado j a partir del instante t
  - Es decir, la probabilidad de que en el instante t+1 el estado sea j, sabiendo que en el instante t el estado era i
- La probabilidad $p_{ij}^{(h)}(t)$ se denomina **probabilidad de transición en h pasos**
  - $p_{ij}^{(h)}(t) = P\{X(t+h) = j \mid X(t) = i\}$
  - Es la probabilidad de pasar del estado i al estado j, mediante h transiciones desde el instante t

3.1 Cadenas de Markov
Cadena de Markov homogénea y regular

- Una cadena de Markov es homogénea si todas sus probabilidades de transición son independientes de t.
- Ser homogénea implica que la transición del estado i al estado j tiene la misma probabilidad en cualquier instante t, y entonces se puede simplificar la notación eliminando “t”.
  - $p_{ij}(t) = p_{ij}$
  - $p_{ij}^{(h)}(t) = p_{ij}^{(h)}$
- Una cadena de Markov es regular si para todos los valores de i y j, se cumple que $p_{ij}^{(h)} > 0$ para algún instante h.
  - Ejemplo: si en una cadena la probabilidad $p_{21}^{(3)} = 0$ ya no haría falta comprobar nada más, porque hay un caso en el intante h=3 en el que la probabilidad no es >0.
  - Ejemplo 2: si en otra cadena $p_{21}^{(3)} = 0$ pero en h=4 todos los valores son >0, es regular, porque hemos encontrado un instante h en el que no hay ninguna prbabilidad de trasición cero.
- Ser regular significa que la cadena tiene una distribución estacionaria, y es posible calcular las probabilidades para un valor infinito de h, es decir $p_{ij}^{(\infty)}$.

3.1 Cadenas de Markov
Ejemplo 6.7: Previsiones meteorológicas

- En una ciudad, cada día es soleado o lluvioso.
- Un día soleado es seguido por otro día soleado con probabilidad 0.7, mientras que un día lluvioso es seguido por un día soleado con probabilidad 0.4.
- Si llueve el lunes, realizar un pronóstico para
  a) Martes
  b) Miércoles
  c) Jueves

3.1 Cadenas de Markov
Ejemplo 6.7 (solución)

- Las condiciones climáticas en este problema representan una cadena de Markov homogénea con 2 estados:
  - estado 1 = “soleado” y estado 2 = “lluvioso”.
- Las probabilidades de transición son:
  - $p_{11} = 0{,}7$, $p_{12} = 1\text{-}0{,}7 = 0{,}3$, $p_{21} = 0{,}4$, $p_{22} = 1\text{-}0{,}4 = 0{,}6$
- El siguiente diagrama de transición refleja el comportamiento de esta cadena de Markov.
  - Las flechas representan todas las transiciones posibles en un solo paso, junto con las probabilidades correspondientes.

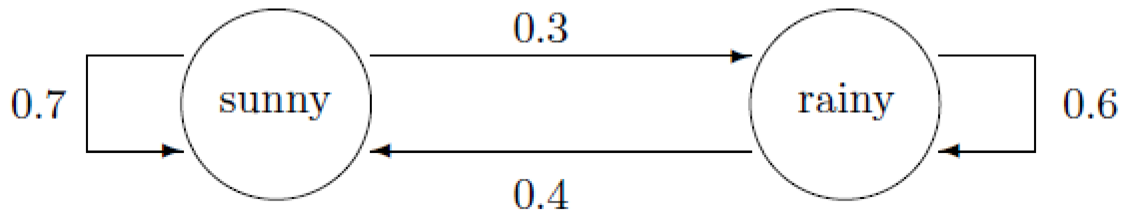
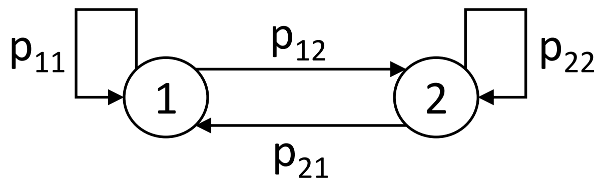


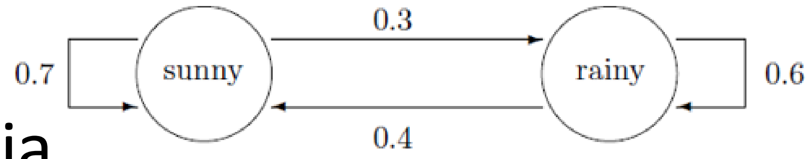
FIGURE 6.2: *Transition diagram for the Markov chain in Example 6.7.*



3.1 Cadenas de Markov
Ejemplo 6.7 (solución) (a)

a) Pronóstico para el martes (probabilidades de transición en 1 paso)

- Soleado:
  - Si llueve el lunes, entonces el martes será soleado con probabilidad $p_{21} = 0.4$ (haciendo una transición de un día lluvioso a un día soleado)
- Lluvioso:
  - Si llueve el lunes, entonces el martes será lluvioso con probabilidad $p_{22} = 0.6$ (haciendo una transición de un día lluvioso a un día lluvioso)
  - Nota: Podría calcularse mediante la regla del complemento: 1-0,4=0.6



- Podemos predecir un 60% de probabilidad de lluvia

3.1 Cadenas de MarkovEjemplo 6.7 (solución) (b)

b) Pronóstico para el miércoles (probabilidades de transición en 2 pasos, h=2)

- Tiempo: Lunes: t=0, martes: t=1, Miércoles: t=2
- Estados: Soleado = 1, Lluvioso = 2

- P {Miércoles soleado | Lunes es lluvioso} = $p_{21}^{(2)}$
- Uso de la Ley de Probabilidad Total (Bayes)
  - A={Miércoles soleado | Lunes lluvioso}
  - B1={Martes soleado | Lunes lluvioso}
  - B2={Martes lluvioso | Lunes lluvioso}
  - $P\{A\} = P\{A \mid B_1\}\ P\{B_1\} + P\{A \mid B_2\}\ P\{B_2\}$

- $p_{21}^{(2)} = P\{X(2)=1|X(1)=1\} \cdot P\{X(1)=1\} + P\{X(2)=1|X(1)=2\} \cdot P\{X(1)=2\}$
- $p_{21}^{(2)} = p_{21}\ p_{11} + p_{22}\ p_{21} = (0.4)\ (0.7)+(0.6)(0.4) = 0{,}52$

- Podemos predecir un 52% de probabilidad de sol el miércoles, y 48% de lluvia
  - $p_{22}^{(2)} = 1 - p_{21}^{(2)} = 1\text{-}0{,}52 = 0{,}48$

3.1 Cadenas de Markov
Ejemplo 6.7 (solución) (c)

c) Pronóstico para el jueves (probabilidades de transición en 3 pasos, h=3)

- Tiempo: Lunes: t=0, martes: t=1, Miércoles: t=2, jueves: t=3
- Estados: Soleado = 1, Lluvioso = 2
- P {Jueves soleado | Lunes lluvioso} = $p_{21}^{(3)}$
- $p_{21}^{(3)} = p_{21}^{(2)}\, p_{11} + p_{22}^{(2)}\, p_{21} = (0.52)(0.7)+(0.48)(0.4) = 0{,}556$

- Podemos predecir un 55,6% de probabilidad de sol el jueves, y un 44,4% de lluvia
  - $p_{22}^{(3)} = 1 — p_{21}^{(3)} = 1\text{-}0{,}56 = 0{,}444$

- *NOTA: Cuando h (pasos) es alto, es más fácil aplicar un enfoque matricial*

3.2 Enfoque matricial

- Todas las probabilidades de transición en un solo paso p_{ij} se pueden escribir en una matriz (P) de probabilidades de transición con rango n×n
- Propiedades:
  - En cada fila la suma es 1: $p_{i1} + p_{i2} + . . . + p_{en} = 1$
  - Pero no en cada columna
- Esta matriz se llama matriz estocástica

$$\begin{array}{ccc|c} & & & \begin{matrix}\text{From} \\ \text{state:}\end{matrix} \\ P & = & \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix} \\ \hline \text{To state:} & & \begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad \cdots & \quad n \end{matrix} & \end{array}$$

3.2 Enfoque matricial
Matriz de probabilidades de transición en h pasos

- Del mismo modo, las probabilidades de transición en h pasos se pueden escribir en una matriz de probabilidades de transición en h pasos
- También es una matriz estocástica
- $P^{(h)} = P \cdot P \cdot P \ldots = P^h$

$$P^{(h)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(h)} & p_{12}^{(h)} & \cdots & p_{1n}^{(h)} \\ p_{21}^{(h)} & p_{22}^{(h)} & \cdots & p_{2n}^{(h)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1}^{(h)} & p_{n2}^{(h)} & \cdots & p_{nn}^{(h)} \end{pmatrix}$$

Recordar el producto de dos matrices Caso 1

- Rangos iguales: (NxN) · (NxN) = (NxN)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Recordar el producto de dos matrices Caso 2

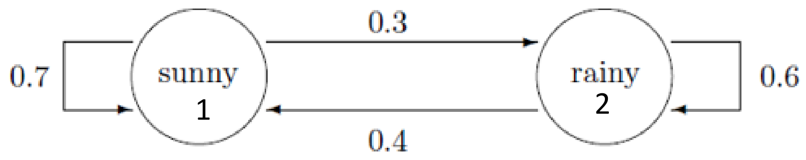
- Rangos diferentes: (NxM) · (MxS) = (NxS)
    - Ejemplo: (3x2) (2x3) = (3x3)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{pmatrix}$$

3.2 Enfoque matricial
Ejemplo 6.7 (Previsiones meteorológicas)

- Si llueve el lunes, pronósticos para
    a) Martes: Sol = p_{21} = 0,4, Lluvia = p_{22} = 0,6
    b) Miércoles: Sol = $p_{21}^{(2)}$ = 0,52, Lluvia = $p_{22}^{(2)}$ = 0,48
    c) Jueves: Sol = $p_{21}^{(3)}$ = 0,556, Lluvia = $p_{22}^{(3)}$ = 0,444



$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ \mathbf{0.4} & \mathbf{0.6} \end{pmatrix}$$

$$P^{(2)} = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ \mathbf{0.52} & \mathbf{0.48} \end{pmatrix}$$

$$P^{(3)} = P^{(2)} \cdot P = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.583 & 0.417 \\ \mathbf{0.556} & \mathbf{0.444} \end{pmatrix}$$

3.2 Enfoque matricial
Ejemplo 6.9 (Dispositivo compartido)

- Un ordeanador es compartido por 2 usuarios que envían tareas a un odenador remoto y trabajan de forma independiente.
- En cualquier momento, cualquier usuario conectado puede desconectarse con probabilidad 0.5, y cualquier usuario desconectado puede conectarse con probabilidad 0.2.
- X(t) es el número de usuarios simultáneos en el tiempo t (minutos)
  - Es una cadena de Markov con 3 estados: 0, 1, y 2.
- Obtener:
  a) La matriz de probabilidades de transición en 1 paso
  b) La matriz de probabilidades de transición en 2 pasos

3.2 Enfoque matricial
Ejemplo 6.9 (solución). Calcular de p_{00}

- Necesitamos calcular p_{00}, p_{01}, p_{02}, p_{10},.., p_{22}
- Tenemos:
  - P {Desconectar usuario conectado} = 0.5
  - P {No desconectar usuario conectado} = 1-0,5 = 0.5
  - P {Conectar usuario desconectado} = 0.2
  - P {No conectar usuario desconectado} = 1-0,2=0.8

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

- Calcular p_{00}
  - X(0)=0, Ningún usuario conectado en t=0
  - X(1) es el número de nuevas conexiones dentro del minuto siguiente (t=1)
  - X(1) es una variable aleatoria con distribución binomial B(n,p)=B(2,0.2)
    - $p_{00} = P\{X(1) = 0 \mid X(0) = 0\} = \binom{2}{0} 0.2^0 0.8^2 = 0.8^2 = 0.64$
  - Otro método:
    - p_{00} = P {(No conectar usuario A desconectado) AND (No conectar usuario B desconectado} = 0.8·0.8=0.64

$$P(x) = P\{X = x\} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

3.2 Enfoque matricial
Ejemplo 6.9 (solución). Calcular p_{01}, p_{02}

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

- Calcular p_{01}
  - Método Binomial:
    - $p_{01} = \binom{2}{1} 0.2^1 0.8^1 = 2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.32$
  - Otro método:
    - p_{01} = (P {[(Conectar usuario A desconectado) AND (No conectar usuario B desconectado)] OR [(No conectar usuario A desconectado) AND (Conectar usuario B desconectado)]}) = (0.2·0.8) + (0.8·0.2) =0.32
- Calcular p_{02}
  - Método Binomial:
    - $p_{02} = \binom{2}{2} 0.2^2 0.8^0 = 1 \cdot 0.2^2 \cdot 1 = 0.04$
  - Otro método:
    - p_{02} = P {(Conectar usuario A desconectado) AND (Conectar usuario B desconectado} = 0,2· 0.2 =0.04

$$P(x) = P\{X = x\} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

3.2 Enfoque matricial Ejemplo 6.9 (solución). Calcular p_{10}, p_{11}, p_{12}

- Calcular p_{10}
  - p_{10} = P {(No conectar usuario desconectado) AND (Desconectar usuario conectado)} = 0.8·0.5 = 0.40
- Calcular p_{11}
  - p_{11} =

    (P {[(Conectar usuario desconectado) AND (Desconectar usuario conectado)] OR [(No conectar usuario desconectado) AND (No desconectar usuario conectado)]} = 0.2·0.5 + 0.8·0.5 = 0.50
- Calcular p_{12}
  - p_{12} = P {(Conectar usuario desconectado) AND (No desconectar usuario conectado)} = 0.2·0.5 = 0.10

3.2 Enfoque matricial
Ejemplo 6.9 (solución). Calcular p_{20}, p_{21}, p_{22}

- Calcular p_{20}
  - p_{20} = P {(Desconectar usuario A conectado) AND (Desconectar usuario B conectado)} = 0.5·0.5 = 0.25
- Calcular p_{21}
  - p_{21} =
    - (P {[(Desconectar usuario A conectado) AND (No desconectar usuario B conectado)] OR [(No desconectar usuario A conectado) AND (Desconectar usuario B conectado)]} = 0.5·0.5 + 0.5·0.5 = 0.50
- Calcular p_{22}
  - p_{22} = P {(No desconectar usuario A conectado) AND (No desconectar usuario B conectado)} = 0.5·0.5 = 0.25

3.2 Enfoque matricial
Ejemplo 6.9 (solución). Matrices

- Matriz de probabilidades de transición en un paso

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.32 & 0.04 \\ 0.40 & 0.50 & 0.10 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \end{pmatrix}$$

- Matriz de probabilidades de transición en 2 pasos

$$P^{(2)} = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0.5476 & 0.3848 & 0.0676 \\ 0.4810 & 0.4280 & 0.0910 \\ 0.4225 & 0.4550 & 0.1225 \end{pmatrix}$$

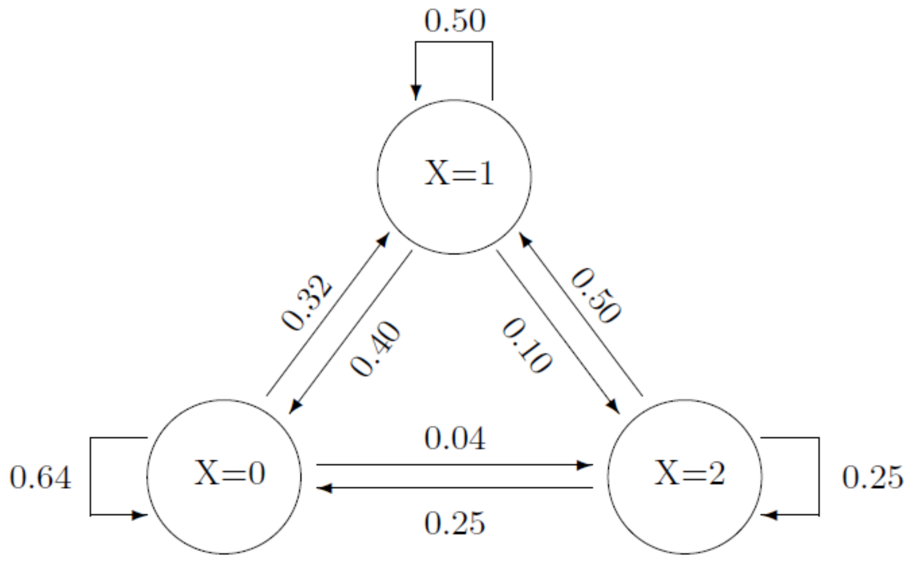


FIGURE 6.3: *Transition diagram for the Markov chain in Example 6.9.*

3.2 Enfoque matricial
Cálculo de la distribución de X(h) (1)

- La distribución de los estados después de h transiciones, o la función de masa de probabilidad de X(h), se puede obtener en forma de una matriz P_h de rango 1 × n
  - $P_h = \left(P_h(1), P_h(2), \ldots, P_h(n)\right)$
  - Donde:
    - $P_h(1) = P\{X(h) = 1\}$
    - $P_h(2) = P\{X(h) = 2\}$
    - $\ldots$
    - $P_h(n) = P\{X(h) = n\}$

3.2 Enfoque matricial
Cálculo de la distribución de X(h) (2)

- Aplicando la Ley de Probabilidad Total (ver libro)
  - $P_h = P_0 P^h$
- Donde P_0 es la distribución inicial
  - $P_0 = \left(P_0(1), P_0(2), \dots, P_0(n)\right)$
- Y P^h es la matriz de probabilidades en h pasos
- Por tanto, cada elemento de P_h se calcula como
  - $P_h(j) = \begin{pmatrix} P_0(1) & \dots & P_0(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1j}^{(h)} \\ \dots \\ p_{1n}^{(h)} \end{pmatrix} = P_0(1)p_{1j}^{(h)} + \cdots + P_0(n)p_{1n}^{(h)}$

$$P^{(h)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(h)} & p_{12}^{(h)} & \cdots & p_{1n}^{(h)} \\ p_{21}^{(h)} & p_{22}^{(h)} & \cdots & p_{2n}^{(h)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1}^{(h)} & p_{n2}^{(h)} & \cdots & p_{nn}^{(h)} \end{pmatrix}$$

3.2 Enfoque matricial
Ejemplo 6.10 (Dispositivo compartido)

Continuación del ejemplo 6.9

a) Si sabemos que hay 2 usuarios conectados a las 10:00,
   - obtener la probabilidad de que haya 1 usuario conectado a las 10:02, después de h = 2 transiciones, es decir P{X(2)=1}

b) Si no sabemos cuántos usuarios hay conectados a las 10:00, pero sabemos que todos los estados (0, 1 o 2 usuarios) son igualmente probables a las 10:00,
   - obtener la probabilidad de que haya 1 usuario conectado a las 10:02, después de h = 2 transiciones, es decir P{X(2)=1}

3.2 Enfoque matricial
Ejemplo 6.10 (solución) (a)

- Necesitamos obtener P {X(2) = 1}, es decir $P_2(1)$
- A las 10:00 hay dos usuarios conectados, por lo que P_0= (0 0 1)
  - Porque $P_0(0)$=0, $P_0(1)$=0, $P_0(2)$=1
- Del ejemplo 6.9 tenemos P^2

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.5476 & 0.3848 & 0.0676 \\ 0.4810 & 0.4280 & 0.0910 \\ 0.4225 & 0.4550 & 0.1225 \end{pmatrix}$$

- Calculamos P_2

$$P_2 = P_0 P^2 = (0 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0.5476 & 0.3848 & 0.0676 \\ 0.4810 & 0.4280 & 0.0910 \\ 0.4225 & 0.4550 & 0.1225 \end{pmatrix} = (0.4225 \quad \mathbf{0.4550} \quad 0.1225)$$

- Como $P_2 = \left(P_2(0),\, P_2(1),\, P_2(2)\right)$,entonces la respuesta es:
- $\boldsymbol{P\{X(2) = 1\} = P_2(1) = 0.4550}$

3.2 Enfoque matricial Ejemplo 6.10 (solución) (b)

- Necesitamos obtener P {X(2) = 1}, es decir $P_2(1)$
- A las 10:00 sabemos que todos los estados (0, 1 o 2 usuarios) son igualmente probables, por lo que
  - $P_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
  - Porque $P_0(0)=1/3$, $P_0(1)=1/3$, $P_0(2)=1/3$
- Del ejemplo 6.9 tenemos P^2

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.5476 & 0.3848 & 0.0676 \\ 0.4810 & 0.4280 & 0.0910 \\ 0.4225 & 0.4550 & 0.1225 \end{pmatrix}$$

- Calculamos P_2

$$P_2 = P_0 P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5476 & 0.3848 & 0.0676 \\ 0.4810 & 0.4280 & 0.0910 \\ 0.4225 & 0.4550 & 0.1225 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4837 & \mathbf{0.4226} & 0.0937 \end{pmatrix}$$

- Como $P_2 = \left(P_2(0),\, P_2(1),\, P_2(2)\right)$,entonces la respuesta es:
- $\boldsymbol{P\{X(2) = 1\} = P_2(1) = 0.4226}$

3.2 Enfoque matricialEjercicios propuestos

- Ejercicios 6.1, 6.2 y 6.3 del libro
  - Las respuestas de 6.1 y 6.3 están disponibles en el libro

3.3 Distribución estacionaria de una cadena de Markov

- Una distribución estacionaria de una cadena de Markov es la distribución de probabilidad de los estados de la cadena de Markov después de un gran número de transiciones.
- Es decir, es el conjunto de probabilidades
  - $P_h(1), P_h(2), \ldots, P_h(n)$ cuando $h \to \infty$
- En lugar de utilizar P_h se usa la notación π
  - $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$
- Donde
  - $\pi_1 = \lim_{h \to \infty} P_h(1)$
  - ..
  - $\pi_n = \lim_{h \to \infty} P_h(n)$
  - $\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_n = 1$

3.3 Distribución estacionaria Cálculo matricial

- La distribución en estado estacionario π se calcula como una solución de
  - $\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum_{x=1}^{n} \pi_x = 1 \end{cases}$
- Donde
  - P es la matriz de probabilidades de transición de la cadena de Markov (rango nxn)
  - π es la matriz que representa la distribución estacionaria, es decir las probabilidades de los estados cuando h tiende a infinito (rango 1xn)

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

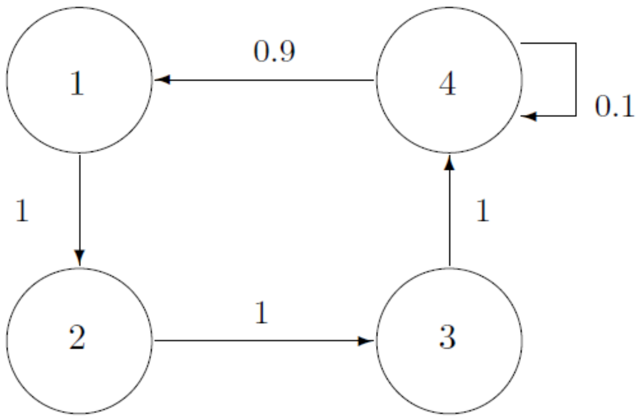
$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \end{pmatrix}$$

3.3 Distribución estacionaria
Existencia de una distribución estacionaria

- No todas las cadenas de Markov tienen una distribución estacionaria
- Si una cadena de Markov es **regular** tiene una distribución estacionaria
- Hay que comprobar si es regular
- Una cadena de Markov es regular si no hay ningún valor cero en la matriz de transiciones de probabilidad de algún paso, es decir todas las transiciones de cualquier estado a cualquier estado son posibles en ese paso.

3.3 Distribución estacionaria
Ejemplo 6.15 (Cadena regular)

- Una cadena de Markov tiene como matriz de probabilidades de transición P



- $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$

- La matriz P contiene ceros, al igual que P^2, P^3, P^4, y P^5. Pero la matriz del paso 6 no contiene ceros, lo que demuestra la regularidad de esta cadena de Markov

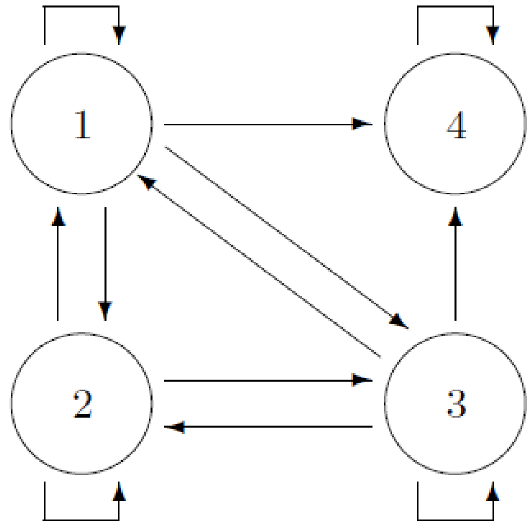
- $P^{(6)} = \begin{pmatrix} 0.009 & 0.090 & 0.900 & 0.001 \\ 0.001 & 0.009 & 0.090 & 0.900 \\ 0.810 & 0.001 & 0.009 & 0.180 \\ 0.162 & 0.810 & 0.001 & 0.027 \end{pmatrix}$

3.3 Distribución estacionaria
Ejemplo 6.16(a) (Cadena irregular)

- Una cadena de Markov tiene como matriz de probabilidades de transición P

  - $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a)



- No hay salida del estado 4, es un *estado absorbente*
  - Porque p_{44}=1
  - La distribución estacionaria es $\pi = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$
  - Entonces $\pi_4 = 1$, a largo plazo sólo estará en el estado 4
- La cadena de Markov es irregular

3.3 Distribución estacionaria
Ejemplo 6.11 (Previsión meteorológica)

- Es una continuación del ejemplo 6.7
- Obtener la probabilidad de que el futuro (a largo plazo) los días sean soleados, y la probabilidad de que los días sean lluviosos.

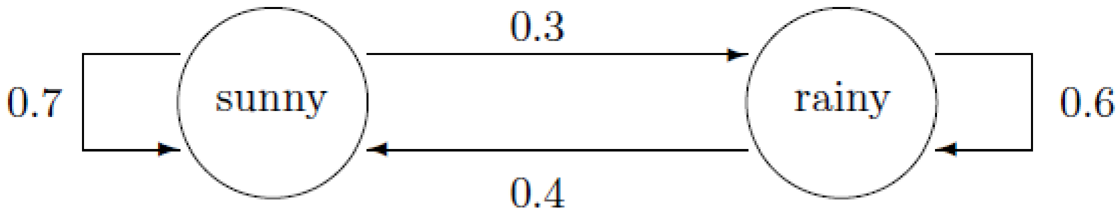


FIGURE 6.2: *Transition diagram for the Markov chain in Example 6.7.*

3.3 Distribución estacionaria
Ejemplo 6.11 (solución)

- De la solución del ejemplo 6.7 tenemos la matriz P
  - Estado 1 = sol, Estado 2=lluvia

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

- El cálculo de la distribución estacionaria para esta cadena de Markov es

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum_{x=1}^{n} \pi_x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\pi_1 \quad \pi_2) \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = (\pi_1 \quad \pi_2) \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 \quad 0.3\pi_1 + 0.6\pi_2) = (\pi_1 \quad \pi_2) \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 = \pi_1 \\ 0.3\pi_1 + 0.6\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_1 = 1 - \pi_2 \end{cases} \Rightarrow 0.3(1 - \pi_2) + 0.6\pi_2 = \pi_2 \Rightarrow -0.3\pi_2 + 0.6\pi_2 - \pi_2 = -0.3 \Rightarrow \boldsymbol{\pi_2} = \frac{0.3}{0.7} = \mathbf{0.43}$$

$$\pi_1 = 1 - \pi_2 \Rightarrow \boldsymbol{\pi_1} = 1 - \frac{3}{7} = \mathbf{0.57}$$

- En el futuro, el 57 % de los días serán soleados, y el 43 % lluviosos.

3.3 Distribución estacionaria Ejercicios propuestos

- Ejercicios 6.4, 6.5, 6.6, 6.7 y 6.8 del libro
  - Las respuestas de 6.4 y 6.5 están disponibles en el libro

4. Procesos de conteo

- 4.1 Proceso binomial
- 4.2 Proceso de Poisson

4. Procesos de conteo
Definición

- Un proceso estocástico X es un proceso de conteo si X(t) representa un número de elementos contados en el instante t
- Los valores son enteros no negativos, $X(t) \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$.
- Todos los procesos de conteo son de estado discreto
- Ejemplos: recuentos de trabajos recibidos, llegados, tareas completadas, mensajes transmitidos, errores detectados, goles marcados, ...
- Se estudiarán dos tipos de procesos de conteo:
  - Proceso binomial (tiempo discreto y estado discreto)
  - Proceso de Poisson (tiempo continuo y estado discreto)

4.1 Proceso binomial

- Un proceso binomial X(n) es el número de éxitos en n ensayos independientes de Bernoulli, donde n = 0, 1, 2,...
- Es un proceso estocástico de conteo de tiempo discreto y estado
- Es una cadena de Markov

4.1 Proceso binomial
Variables aleatorias

- En un proceso de conteo binomial, hay dos variables aleatorias implicadas
  - X(n) = número de éxitos (llegadas) en n ensayos, con distribución binomial B(n,p)
  - Y = número de ensayos entre éxitos consecutivos (llegadas), con distribución geométrica G(p)

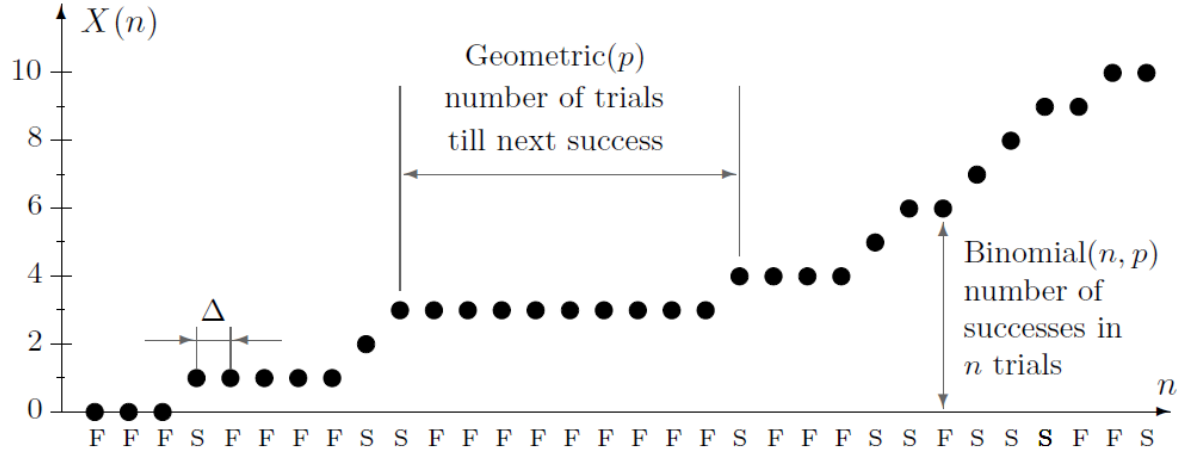


FIGURE 6.7: *Binomial process (sample path). Legend:* S = *success,* F=*failure.*

4.1 Proceso binomial
Cadena de Markov irregular

- Un proceso binomial es una cadena de Markov irregular porque X(n) no disminuye, por lo que una vez que obtenemos un éxito, el número de éxitos nunca volverá a cero.
- El proceso binomial no tiene distribución estacionaria.

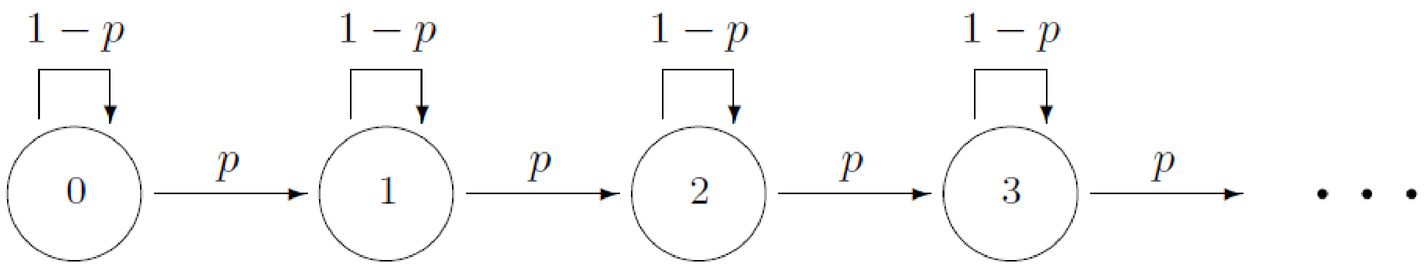


FIGURE 6.8: *Transition diagram for a Binomial counting process.*

4.1 Proceso binomial
Matriz de transiciones de probabilidad

- La matriz de transiciones de probabilidad tiene filas y columnas, porque X(n) puede alcanzar cualquier valor grande para n suficientemente grande.

- $P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1-p & p & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1-p & p & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

- Es más fácil calcular probabilidades usando la fórmula binomial en lugar de matrices

4.2 Proceso de Poisson

- Un proceso de conteo de Poisson es un proceso estocástico en tiempo continuo obtenido de un proceso de conteo binomial cuando el tiempo entre ensayos se aproxima a 0.
- Es un proceso estocástico de tiempo continuo y estado discreto.
  - Es un proceso de Markov de tiempo continuo
  - Pero no es una cadena de Markov,
  - Al ser un proceso de Markov, sólo se necesita el valor más reciente del proceso para predecir sus probabilidades futuras.
- Un proceso de Poisson es adecuado si las llegadas son eventos raros (eventos Poissonianos)
  - Estos eventos ocurren en momentos aleatorios.
  - La probabilidad de que llegue un nuevo evento durante un corto intervalo de tiempo es proporcional a la longitud de este intervalo.
  - La probabilidad de que lleguen más de 1 evento durante ese tiempo es mucho menor en comparación con la longitud de dicho intervalo.
  - Ejemplos de eventos raros incluyen llamadas telefónicas, ataques de virus, errores en software, accidentes de tráfico, desastres naturales, apagones de red, llegadas de mensajes, ...

4.2 Proceso de Poisson Variables aleatorias

- En un proceso de conteo de Poisson, hay tres variables aleatorias implicadas
  - $X(t)$: Poisson(λt) = Número de llegadas hasta el instante t (desde el instante 0)
  - T: Exponencia(λ) = Tiempo entre llegadas consecutivas
  - T_k: Gamma(k, λ) = Tiempo en el que se produce la k-ésima llegada

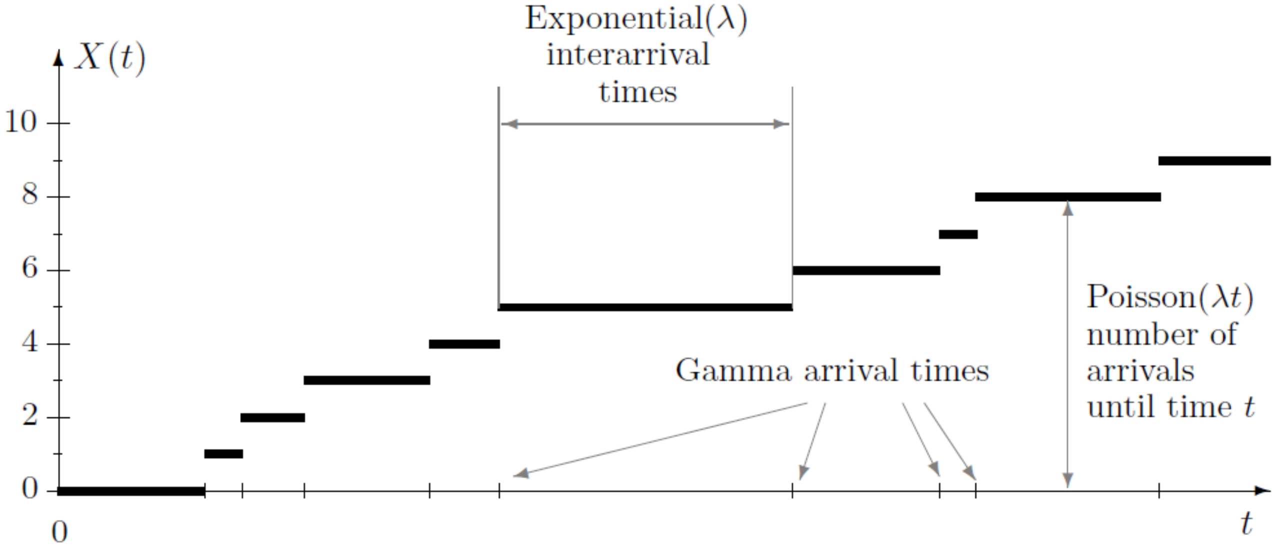


FIGURE 6.10: *Poisson process (sample path).*

4.2 Proceso de Poisson
Variable aleatoria X(t)

- X(t) = Número de llegadas hasta el tiempo t
- Es una variable aleatoria discreta de Poisson(λt)
  - λ = número medio de llegadas por unidad de tiempo
- $f(x) = P\{X(t) = x\} = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^x}{x!}$
- $F(x) = P\{X(t) \leq x\} = \sum_{k=0}^{x} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!})$ Tabla A3 del libro)
- $E(X(t)) = \lambda t$
- $Var(X(t)) = \lambda t$
- Propiedad importante: tiene incrementos independientes
  - $P\{[X(t+s) - X(s)] = x\} = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^x}{x!}$ para cualquier s

4.2 Proceso de Poisson
Variable aleatoria T

- Tiempo entre llegadas consecutivas
- Se trata de una variable aleatoria Exponencial continua.
- $P\{T \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}$
- $P\{T > t\} = e^{-\lambda t}$
- $E(T) = \frac{1}{\lambda}$
- $Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$

4.2 Proceso de Poisson
Variable aleatoria T_k

- Tiempo en el que se produce la k-ésima llegada
- Es una variable aleatoria continua Gamma(k, λ)
- $P\{T_k \leq t\} = P\{\text{k−th llegada ocurra antes o en el tiempo t}\}$
  $= P\{X(t) \geq k\}$
- Al ser variables continuas, se cumple: $P\{T_k > t\} = P\{X(t) < k\}$
- $E(T_k) = \frac{k}{\lambda}$
- $Var(T_k) = \frac{k}{\lambda^2}$

4.2 Proceso de Poisson
Ejemplo 6.20 (Accesos al sitio web)

- El número de visitas a un determinado sitio web sigue un proceso de Poisson con una frecuencia media de 7 visitas por minuto.
  a) En promedio, ¿cuánto tiempo se necesita para obtener 10000 visitas?
  b) ¿Cuál es la probabilidad de que esto suceda en un plazo de 24 horas?

4.2 Proceso de Poisson
Ejemplo 6.20 (Solución)

a) En promedio, ¿cuánto tiempo se necesita para obtener 10000 visitas?
   - T_{10000} = Tiempo (minuto) en el que llega la visita número 10000, desde el inicio
   - Es una variable Gamma(k, λ), con k=10000 y λ=7 visitas/minuto
   - $E(T_{10000}) = \frac{k}{\lambda} = \frac{10000}{7} = 1428.6 \text{ minutos } o \;\; 23.81 \text{ horas}$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esto suceda en 24 horas?
   - 24 horas = 24*60=1440 minutos
   - $P\{T_{10000} \leq 1440\} = \mathbf{0.7881}$
   - Por el Teorema Central del Límite podemos aproximar a una variable Normal estándar
     - $\mu = 1428.6, \;\; \sigma = \sqrt{\frac{k}{\lambda^2}} = \sqrt{\frac{10000}{49}} = 14.3$
     - $P\{T_k \leq 1440\} = P\left\{\frac{T_k - \mu}{\sigma} \leq \frac{1440-1428.6}{14.3}\right\} = P\{Z \leq 0.80\} = 0.7881$

4.2 Proceso de Poisson
Ejemplo 6.20 (Ordenador central)

- Se envían trabajos a un ordenador central, son una frecuencia media de 2 trabajos por minuto.
  a) ---
  b) Calcular la probabilidad de que lleguen más de 3 trabajos durante un minuto.
  c) Calcular la probabilidad de que lleguen más de 30 trabajos durante 10 minutos.
  d) ¿Cuál es el tiempo promedio entre dos llegadas y cuál es la varianza?
  e) Calcular la probabilidad de que el próximo trabajo no llegue durante los próximos 30 segundos.

4.2 Proceso de Poisson
Ejemplo 6.20 b) (Solución) (b)

b) Calcular la probabilidad de que lleguen más de 3 trabajos durante un minuto.

- Proceso de Poisson: X(t) = Número de llegadas hasta el tiempo t
- X(1) es una variable Poisson(λt), con $\lambda=2\text{min}^{-1}$, t=1min, λt=2
- $P\{X(1) > 3\} = 1 - P\{X(1) \leq 3\} = 1 - 0.857 = \mathbf{0.143}$
  - Usando la tabla A3 de libro

4.2 Proceso de Poisson
Ejemplo 6.20 (Solución) (c, d)

c) Calcular la probabilidad de que lleguen más de 30 trabajos durante 10 minutos.
   - Proceso de Poisson: X(t) = Número de llegadas hasta el tiempo t
   - X(10) es una variable Poisson(λt), con λ=2min^{-1}, t=10min, λt=20
   - $P\{X(10) > 30\} = 1 - P\{X(10) \leq 30\} = 1 - 0.987 = \mathbf{0.013}$
     - Usando la tabla A3 de libro

d) ¿Cuál es el tiempo promedio entre dos llegadas y cuál es la varianza?
   - T= Tiempo entre llegadas consecutivas
   - T es una variable aleatoria Exponencial(λ), con λ=2min^{-1}
   - $E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = \mathbf{0.5}\,\boldsymbol{min}$
   - $Var(T) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4} = \mathbf{0.25}\,\boldsymbol{min^2}$

4.2 Proceso de Poisson
Ejemplo 6.20 (Solución) (e)

e) Calcular e la probabilidad de que el próximo trabajo no llegue durante los próximos 30 segundos (0.5 minutos).
   - Proceso de Poisson: X(t) = Número de llegadas hasta el tiempo t
   - X(0.5)) es una variable Poisson(λt), con $\lambda=2\text{min}^{-1}$, t=0.5 min, λt=1
     - $P\{X(0.5)=0\}=\frac{e^{-1}(1)^0}{0!}=e^{-1}=2.72^{-1}=\mathbf{0.368}$

   - Se puede resolver también usando la variable T
   - T= Tiempo entre llegadas consecutivas
   - T es una variable aleatoria Exponencial(λ), con $\lambda=2\text{min}^{-1}$
     - $P\{T>0.5\}=1-P\{T\leq 0.5\}=1-(1-e^{-2\cdot 0.5})=2.72^{-1}=\mathbf{0.368}$

4.2 Proceso de Poisson
Ejercicios propuestos

- Ejercicios 6.17, 6.20, 6.21, 6.22, 6.23 y 6.24 del libro
  - Las respuestas de 6.20, 6.22 y 6.23 están disponibles en el libro

5. Resumen

- Los procesos estocásticos son variables aleatorias que cambian, evolucionan y se desarrollan en el tiempo.
- Hay procesos de tiempo discreto y tiempo continuo, estados discretos y estados continuos, dependiendo de sus tiempos y valores posibles.
- Un proceso de Markov es un proceso de estado discreto, donde solo se necesita el valor más reciente del proceso para predecir sus probabilidades futuras.
- Una cadena de Markov es un proceso de Markov en tiempo discreto y estado discreto.
  - Una cadena de Markov se describe completamente por su distribución inicial de probabilidad y por us probabilidades de transición
  - Si una cadena de Markov es regular, se pueden calcular sus probabilidades a largo plazo mediante una distribución estacionaria
- Los procesos de conteo binomial y Poisson son procesos de Markov, de tiempo discreto y continuo, respectivamente.
- Los procesos de conteo de tiempo continuo se pueden considerar como el límite de algunos procesos de tiempo discreto, cuando el tiempo entre eventos a contar tiende a cero.