Contrastes de hipótesis no paramétricos

Contenidos adaptados del libro “Probability and statistics for computer scientists, Second edition, M. Baron” (Capítulo 10.2)

Contenido

1. Objetivos
2. Introducción
3. Contraste de signos para la mediana poblacional
4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon para la mediana poblacional
5. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon para la diferencia de dos medianas poblacionales
6. Contraste de la suma de rangos con signo de Mann-Whitney-Wilcoxon para la diferencia de dos medianas poblacionales
7. Resumen

1. Objetivos

- Conocer el papel de los contrastes de hipótesis no paramétricos
- Determinar en qué situaciones hay que aplicar un contraste no paramétrico
- Realizar contrastes de hipótesis no paramétricos para la mediana poblacional aplicando los métodos de signos, y de rangos con signo de Wilcoxon
- Realizar contrastes de hipótesis no paramétricos para la diferencia de medianas de dos poblaciones pareadas aplicando el método de rangos con signo de Wilcoxon
- Realizar contrastes de hipótesis no paramétricos para la diferencia de medianas de dos poblaciones independientes aplicando el método de la suma de rangos con signo de Mann-Whitney-Wilcoxon

2. Introducción

- Un contraste de hipótesis no paramétrico se aplica cuando no hay evidencias de que los datos de una población tengan una distribución Normal
  - Hay diferentes métodos para comprobar la normalidad de los datos: Chi-Square, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors, Anderson-Darling, Shapiro-Wilk, Cramér-von-Mises
  - El software estadístico (R, SPSS, Statgraphics, Excel, …) ofrece funcionalidad para comprobar la normalidad
  - En los ejercicios no será necesario comprobar la normalidad, ya que indicará si los datos de cada ejercicio son normales o no
- También se utiliza cuando no se dispone de datos numéricos concretos, sino de datos ordinales
  - Por ejemplo, no se dispone del precio exacto de varios ordenadores, pero se sabe los que están por debajo de un precio de referencia y los que están por encima de ese precio

2. Introducción
Tipos de contrastes no paramétricos

- Hipótesis sobre la mediana de una población
  - Contraste de signos
  - Contraste de rangos con signo de Wilcoxon (más preciso)
- Hipótesis sobre la diferencia de medianas de dos poblaciones
  - Si son poblaciónes relacionadas (pareadas)
    - Contraste de rangos con signo de Wilcoxon
  - Si son poblaciónes independientes
    - Contraste de la suma de rangos con signo de Mann-Whitney-Wilcoxon

3. Contraste de signos para la mediana poblacional

- En inglés se denomina *Sign test*
- Es un contraste no paramétrico para una población
- Es un contraste sobre el posible valor de la mediana poblacional (M)
  - $H_0: M = m_o$
- Consiste en comprobar si exactamente la mitad de la población está por debajo de un valor determinado m_o y la mitad está por encima de m_o
- Para llevar a cabo el contraste, sólo hay que contar cuántas observaciones están por encima de m_o
  - Estadístico de contraste: $S = \text{número de valores mayores que } m_o \text{ en una muestra de n valores}$
  - Muestra: $\{X_1, \dots, X_n\}$
  - S_o = Número de observaciones en la muestra mayores que m_o
- NOTA: Se asume que la distribución de X_i es continua, por tanto $P\{X_i = m_o\} = 0$, por lo que los valores iguales a m_o deben ser eliminados de la muestra

3. Contraste de signos
Datos considerados como signos

- Las observaciones de la muestra son consideradas como signos
  - $Si\ X_i > m_o \rightarrow signo\ +$
  - $Si\ X_i < m_o \rightarrow signo\ -$
  - $Si\ X_i = m_o \rightarrow signo\ 0$ (eliminar del conjunto de datos)
- Por tanto, el estadístico de contraste S puede considerarse como "número de signos positivos en una muestra de n datos"
- Ejemplo
  - $m = 3$
  - $Muestra = (3, 2, 5, 4, 7, 3, 6, 5, 8, 1)$
  - $Signos = (0, -, +, +, +, 0, +, +, +, -) = (-, +, +, +, +, +, +, -)$ Eliminando 0
  - Por lo que, $n = 8$, $S_o = 6$

3. Contraste de signos
Procedimiento

- Paso 1: Eliminar las observaciones iguales a m_o y calcular el valor del estadístico de contraste
  - S_o= número de observaciones mayores que m_o
- Paso 2: Determinar si el estadístico de contraste es Binomial o Normal
  - Si n es pequeño, S tiene distribución Binomial $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$
    - Se suele aceptar que n es pequeño cuando < 30, y grande cuando ≥ 30
  - Si n es grande, S tiene distribución Normal $B\left(n, \frac{1}{2}\right) \approx N\left(\frac{n}{2}, \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$
    - Realizando una estandarización y corrección de continuidad
      - $P\{X \leq x\} \approx P\{X < x + 0.5\}$
      - $P\{X < x\} \approx P\{X < x - 0.5\}$
- Paso 3: Calcular el p-valor
  - $H_0: M = m_o$ vs $H_A: M > m_o$, $\text{p-valor} = P\{S \geq S_o\} = 1 - P\{S < S_o\}$
  - $H_0: M = m_o$ vs $H_A: M < m_o$, $\text{p-valor} = P\{S \leq S_o\}$
  - $H_0: M = m_o$ vs $H_A: M \neq m_o$, $\text{p-valor} = 2 \cdot \min(P\{S \leq S_o\},\ P\{S \geq S_o\})$
- Paso 4: Llegar a una conclusión
  - Rechazar H_0 si $\text{p-valor} < \alpha$ y aceptar H_A (Normalmente se considera $\alpha = 0.05$)

3. Contraste de signos
Ejemplo 10.9 (Uso sin autorización de una cuenta)

- El objetivo es detectar si una cuenta de ordenador fue utilizada por una persona no autorizada, midiendo los tiempos entre pulsaciones de teclas
- El propietario de la cuenta generalmente deja 0.2 segundos entre pulsaciones de teclas
- Los siguientes tiempos entre pulsaciones de tecla se registraron cuando un usuario escribió el nombre de usuario y la contraseña:
  - 0.24, 0.22, 0.26, 0.34, 0.35, 0.32, 0.33, 0.29, 0.19, 0.36, 0.30, 0.15, 0.17, 0.28, 0.38, 0.40, 0.37, 0.27 segundos
- Con un nivel de confianza del 95 %, ¿la cuenta fue utilizada por una persona no autorizada?

3. Contraste de signos
Ejemplo 10.9 (Solución) (I)

- En el ejemplo 9.28 se resolvió el mismo caso mediante un contraste paramétrico, asumiendo que los datos eran Normales
- Ahora asumimos que no son Normales y resolvemos el mismo ejemplo aplicando un contraste de signos
- Hipótesis:
  - H_0: $M = 0.2$
  - H_A: $M \neq 0.2$
- $n = 18,\ m_o = 0.2$
- $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$

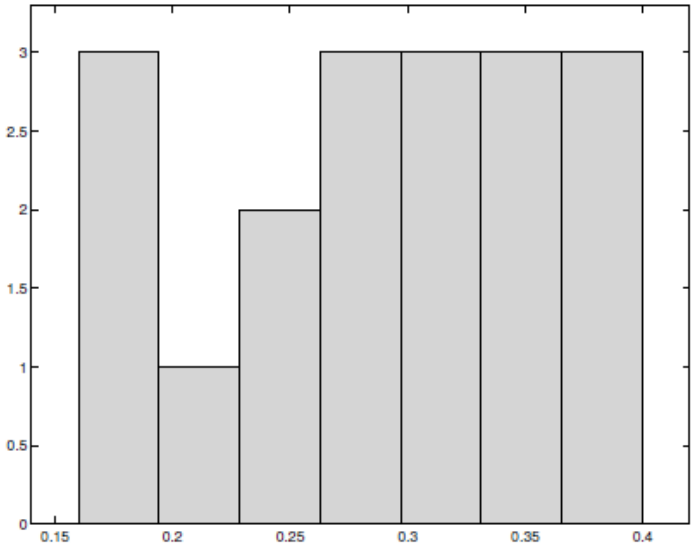


FIGURE 10.1: *The histogram of times*

3. Contraste de signos
Ejemplo 10.9 (Solución) (II)

- Paso 1:
  - $n = 18$, porque ningún tiempo registrado es igual a m_o (0.2)
  - $S_o = 15$, porque 15 de los 18 tiempos registrados son mayores que 0.2
- Paso 2: $n = 18$ es pequeño (< 30), por tanto S tiene distribución Binomial
  - $B\left(n, \frac{1}{2}\right) = B(18, 0.5)$
- Paso 3: H_A: $M \neq 0.2$ por tanto $\text{p-valor} = 2 \cdot \min(P\{S \leq S_o\}, P\{S \geq S_o\})$
  - $\text{p-valor} = 2 \cdot \min(P\{S \leq 15), P\{S \geq 15)\}) = 2 \cdot \min(P\{S \leq 15), 1 - P\{S \leq 14)\} = 2 \cdot \min(0.9993, 1 - 0.9962) = 2 \cdot 0.0038 = \mathbf{0.0076}$
    - Opción 1: Usando la tabla de la distribución Binomial
    - Opción 2: Calculando $P\{X \leq x\} = \sum_{k=o}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- Paso 4: $\text{p-valor} = 0.0076 < 0.05$ → **El contraste de signos rechaza H_0**, por lo que con un 95% de confianza, SÍ se puede afirmar que la cuenta fue usada por una persona no autorizada (Misma conclusion que en el ejemplo 9.28)
  - También podría afirmarse con un nivel de confianza del 99% ($1 - 0.0076 = 0.9924$)

3. Contraste de signos
Ejemplo 10.10 (Exceso de velocidad)

- Cuando Eric aprendió a conducir, sospechaba que la velocidad media de los coches en su camino a la escuela excede el límite de velocidad, que es de 30 mph
- Como experimento, conduce a la escuela con su amigo Evanne a una velocidad de 30 mph y Evanne cuenta los coches
- Al final, Evanne informa que 56 coches conducían más rápido que Eric, y 44 coches conducían más lento
- ¿Esto confirma la sospecha de Eric?
  - Con una confianza del 95%

3. Contraste de signos
Ejemplo 10.10 (Solución) (I)

- Hipótesis:
  - H_0: $M = 30$
  - H_A: $M > 30$
- $n = 100$
- $S_o = 56$
- $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$
- Este ejercicio utiliza datos ordinales
  - No es necesario conocer la velocidad exacta de cada coche para el contraste de signos

3. Contraste de signos
Ejemplo 10.10 (Solución) (II)

- Paso 1: $S_o = 56$, porque 56 de los 100 coches exceden 30 mph
- Paso 2: $n = 100$ es grande (≥ 30), por lo que S tiene una distribución Normal
  - $N\left(\frac{n}{2}, \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = N(50, 5)$
- Paso 3: H_A: $M > 30$ por lo que $\text{p-valor} = P\{S \geq S_o\} = 1 - P\{S < S_o\} = 1 - P\{S < 56\} \approx 1 - P\{S < 55.5\} = 1 - P\left\{Z < \frac{55.5-50}{5}\right\} = 1 - P\{Z < 1.1\} = 1 - 0.8643 = \mathbf{0.1357}$
  - Opción 1: Usando la table de la distribución Normal estándar
  - Opción 2: Calculando $P\{Z \leq z\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dx$
  - Nota: El cambio de 56 por 55.5 es debido a la corrección de continuidad
- Paso 4: $\text{p-valor} = 0.1357 > 0.05$ → **El contraste de signos no puede rechazar H_0**, por lo que con una confianza del 95%, podemos concluir que Eric y Evanne no han encontrado una evidencia significativa para afirmar que la (mediana de la) velocidad de los coches es superior al límite de velocidad

3. Contraste de signos
Ejercicios propuestos

- Ejercicios 10.10 a 10.14 del libro
  - Las respuestas de 10.11 y 10.13 están en el libro

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon para la mediana poblacional

- En inglés se denomina *Wilcoxon signed rank test*
- Es un contraste no paramétrico para una población
- Es un contraste sobre el posible valor de la mediana poblacional (M)
  - $H_0: M = m_o$
- Se utiliza un estadístico de contraste W que representa la suma de las posiciones (llamadas rangos o ranks) que ocuparían, en una lista ordenada (ranking) de valores absolutos de la diferencia entre el valor de cada observación y la mediana muestral, aquellas observaciones que sean superiores a la mediana
    - $W = \sum_{i:\, X_i > m_o} R_i$
  - Muestra: $\{X_1, \dots, X_n\}$
  - Distancia de la observación X_i al valor m_o a contrastar con la mediana: $d_i = |X_i - m_o|$
  - R_i (rango o rank) es la posición que ocupa el valor de la distancia d_i cuando las distancias se ordenan de menor a mayor
  - Nota: Si dos o más d_i son iguales, entonces su rango debe recalcularse como la media sus valores
    - Ejemplo: Si d_6 y d_9 son iguales, R_6 y R_9 deben ser también iguales, y ambos se recalculan como $\frac{R_6+R_9}{2}$

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Datos considerados como signos

- Las observaciones de la muestra son consideradas como signos
  - $Si\ X_i > m_o$ → $signo\ +$
  - $Si\ X_i < m_o$ → $signo\ -$
  - $Si\ X_i = m_o$ → $signo\ 0$ (eliminar del conjunto de datos)
- W = suma de los rangos (ranks) de las distancias de las observaciones que tienen signo +

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Procedimiento

- Paso 1: : Eliminar las observaciones iguales m_o y calcular W_o
  - $W_o = \sum_{i:\, X_i > m_o} R_i$
- Paso 2: Determinar la distribución de probabilidad del estadístico de contraste W:
  - Si $\mathrm{n} < 15$ usar como función de masa de probabilidad: $f_n(x) = 0.5 f_{n-1}(x) + 0.5 f_{n-1}(x-n)$ (Tabla A8 del libro)
  - Si $\mathrm{n} \geq 15$ $\quad W \approx N\left(\frac{n(n+1)}{4}, \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}\right)$
    - Realizando una estandarización y corrección de continuidad
      - $P\{X \leq x\} \approx P\{X < x + 0.5\}$
      - $P\{X < x\} \approx P\{X < x - 0.5\}$
- Paso 3: Calcular el p-valor
  - $H_0: M = m_o$ vs $H_A: M > m_o, \mathrm{p{-}valor} = P\{W \geq W_o\} = 1 - P\{W < W_o\}$
  - $H_0: M = m_o$ vs $H_A: M < m_o, \mathrm{p{-}valor} = P\{W \leq W_o\}$
  - $H_0: M = m_o$ vs $H_A: M \neq m_o,\ \mathrm{p{-}valor} = 2 \cdot \min(P\{W \leq W_o\},\ P\{W \geq W_o\})$
- Paso 4: Llegar a una conclusión
  - Rechazar H_0 si $\mathrm{p{-}valor} < \alpha$ y aceptar H_A (Normalmente se considera $\alpha = 0.05$)

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Ejemplo 10.12 (Oferta y demanda)

- En una empresa hay que asegurarse de que las impresoras no se queden sin papel
- Se ha comprobado que durante 6 días la empresa ha consumido 7, 5.5, 9.5, 6, 3.5, y 9 paquetes de papel.
- Se puede suponer que las cantidades de papel usado son independientes en diferentes días, y los datos de esos 6 es una muestra aleatoria
- ¿Puede afirmarse, con un nivel de significación del 5%, que la mediana del consumo diario de papel es de más de 5 paquetes?

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Ejemplo 10.12 (Solución) (I)

- Hipótesis:
  - H_0: $M = 5$
  - H_A: $M > 5$
- $n = 6$
- $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$
- Paso 1:

$$W_o = \sum_{i:\, X_i > 5} R_i = 4 + 1 + 6 + 2 + 5 = 18$$

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{X_i}$	$\boldsymbol{X_i - 5}$	$\boldsymbol{d_i}$	$\boldsymbol{R_i}$	**signo**
1	7	2	2	4	+
2	5.5	0.5	0.5	1	+
3	9.5	4.5	4.5	6	+
4	6	1	1	2	+
5	3.5	-1.5	1.5	3	-
6	9	4	4	5	+

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Ejemplo 10.12 (Solución) (II)

- Paso 2:
  - $n = 6 \ < \ 15$ → Usar Tabla A8 "Critical values for the Wilcoxon Signed Rank Test"
- Paso : $H_A: M > 5, \ \ \text{p-valor} = P\{W \geq 18\} \in (0.05, 0.1]$
  - Según la tabla A8: $P\{W \geq 18\} \leq 0.1$ y $P\{W \geq 19\} \leq 0.05$, por lo que $P\{W \geq 18\}$ no es más pequeño que 0.05

n	α, left-tail probability for the left-tail test							α, right-tail probability for the right-tail test						
	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.200	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—	0	6	—	—	—	—	—	—
4	—	—	—	—	—	0	2	8	10	—	—	—	—	—
5	—	—	—	—	0	2	3	12	13	15	—	—	—	—
6	—	—	—	0	2	3	5	16	18	19	21	—	—	—
7	—	—	0	2	3	5	8	20	23	25	26	28	—	—
8	—	0	1	3	5	8	11	25	28	31	33	35	36	—
9	—	1	3	5	8	10	14	31	35	37	40	42	44	—
10	0	3	5	8	10	14	18	37	41	45	47	50	52	55

$\boxed{P\{W \leq w\} \leq \alpha}$

$\boxed{P\{W \geq w\} \leq \alpha}$

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Ejemplo 10.12 (Solución) (III)

- Paso 4: $\mathrm{p-valor} > 0.05$
  - El **contraste de rangos con signo de Wilcoxon no puede rechazar $\boldsymbol{H_0}$**, por lo que con una confianza del 95 %, podemos concluir que estos datos no proporcionan evidencia significativa de que la mediana del consumo de papel supere los 5 paquetes por día.

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Ejemplo 10.13 (Uso no autorizado de una cuenta)

- El objetivo es detectar si una cuenta de un ordenador ha sido utilizada por una persona no autorizada, midiendo los tiempos entre pulsaciones de teclas
- El propietario de la cuenta generalmente tarda 0.2 segundos entre pulsaciones de teclas
- Se registraron los siguientes tiempos entre pulsaciones de tecla cuando un usuario escribió el nombre de usuario y la contraseña:
  - 0.24, 0.22, 0.26, 0.34, 0.35, 0.32, 0.33, 0.29, 0.19, 0.36, 0.30, 0.15, 0.17, 0.28, 0.38, 0.40, 0.37, 0.27 segundos
- Con un nivel de confianza del 95 %, ¿se puede afirmar que la cuenta fue utilizada por una persona no autorizada?
- Es el mismo ejemplo que 10.9, pero ahora resolviéndolo con un contraste de rangos con signo de Wilcoxon

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Ejemplo 10.13 (Solución) (I)

- Hipótesis:
  - H_0: $M = 0.2$
  - H_A: $M \neq 0.2$
- $n = 18$
- $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$
- Paso 1:

$$W_o = \sum_{i:\, X_i > 0.2} R_i$$
$$= 4 + 2 + 6 + 13 + 14 + 11 + 12 + 9 + 15 + 10 + 8 + 17 + 18 + 16 + 7 = 162$$

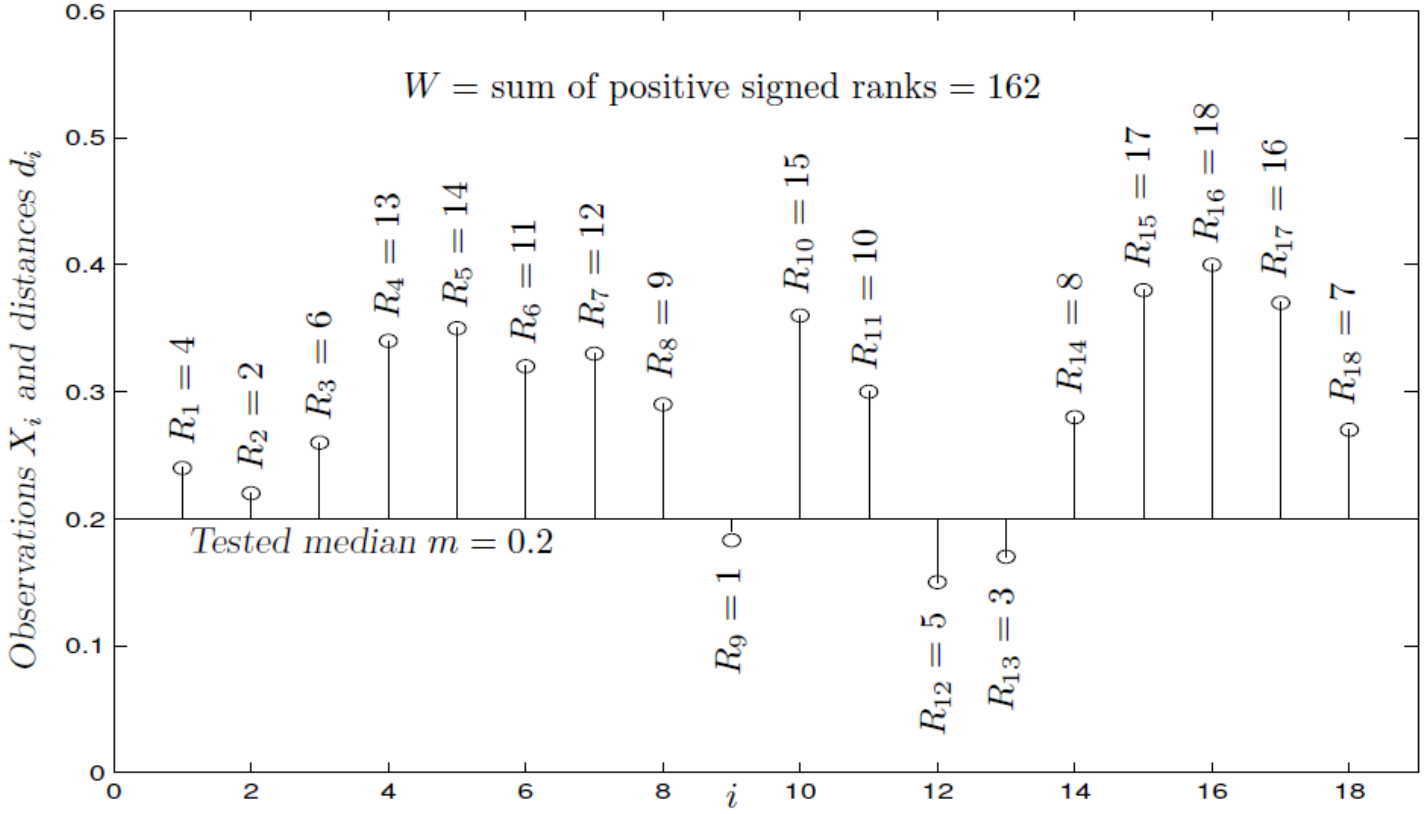


FIGURE 10.3: *Ranks of distances $d_i = |X_i - m|$ for the Wilcoxon signed rank test.*

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Ejemplo 10.13 (Solución) (II)

- Paso 2:
  - n=18 $\geq 15 \quad W \approx N\left(\frac{n(n+1)}{4}, \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}\right) = N(85.5, 23)$
- Paso 3: $H_A: M \neq 0.2, \quad \text{p}-\text{valor} = 2 \cdot \min(P\{W \leq 162\},\ P\{W \geq 162\})$
  - $P\{W \geq 162\} = 1 - P\{W < 162\} \approx 1 - P\{W < 161.5\} = 1 - P\left\{Z < \frac{161.5-85.5}{23}\right\} = 1 - P\{Z < 3.30\} = 1 - 0.9995 = 0.0005$
  - $P\{W \leq 162\} \approx P\{W \leq 162.5\} = P\left\{Z \leq \frac{162.5-85.5}{23}\right\} = P\{Z \leq 3.35\} = 0.9996$
  - $\text{p}-\text{valor} = 2 \cdot \min(0.0006, 0.9995) = 2 \cdot 0.0006 = \mathbf{0.001}$
- Paso 4: $\text{p}-\text{valor} = 0.001 < 0.05$
  - El **contraste de rangos con signo de Wilcoxon rechaza H_0**, por lo que SÍ hay evidencias para afirmar con un 95% de confianza que la cuenta ha sido usada por una persona no autorizada

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Ejercicios propuestos

- Ejercicios 10.15 a 10.19 del libro
  - La respuestas de 10.16 y 10.18 están en el libro

5. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon para la diferencia de dos medianas poblacionales

- En inglés se denomina *Wilcoxon signed rank paired test*
- Se aplica al caso de dos muestras dependientes (pareadas), para comprobar si sus poblaciones tienen la misma mediana
- En las dos poblaciones se obtienen las observaciones de las dos muestras sobre una misma propiedad de los mismos individuos, normalmente son valores antes y después de realizar alguna actuación sobre los individuos.
  - Por ejemplo, el peso antes y después de hacer una dieta
- Muestras: $\{X_1, \dots, X_n\}$ $\{Y_1, \dots, Y_n\}$
- H_0: $M_X = M_Y$
- La hipótesis puede reformularse como que la mediana de las diferencias sea igual a cero
  - Diferencias: $D = \{D_1, \dots, D_n\} = \{X_1 - Y_1, \dots, X_n - Y_n\}$
  - $H_0: M_D = 0$
- Y aplicar el conocido contraste de rangos con signo de Wilcoxon para un sola muestra

5. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon para datos pareados. Ejemplo (Pesos)

- Conocemos los pesos de 10 personas antes y después de Navidad, y esos pesos no tienen una distribución normal
- Con un nivel de confianza del 95%, ¿se puede afirmar que no ha habido cambio en el peso?

Persona	Peso antes (X_i)	Peso después (Y_i)	Diferencia $D_i = Xi - Yi$
1	90.1	89.2	0.9
2	97.7	96.1	1.6
3	66.1	68.5	-2.4
4	65.3	67.4	-2.1
5	70.6	69.6	1
6	98.4	98.9	-0.5
7	65.2	67.2	-2
8	88.2	90.1	-1.9
9	90.4	89.9	0.5
10	90.8	91.1	-0.3

5. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon para datos pareados. Ejemplo (Pesos) (Solución) (I)

- Hipótesis:
  - H_0: $M_D = 0$
  - H_A: $M_D \neq 0$
- $n = 10$
- $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$
- Paso 1:
  - $W_o = \sum_{i:\, D_i > 0} R_i = 4 + 6 + 5 + 2.5 = 17.5$
  - NOTA: Como d_6 y d_9 son iguales, R_6 y R_9 se recalculan como:
    - $\frac{R_6 + R_9}{2} = \frac{2+3}{2} = 2.5$

Persona	D_i	$D_i - 0$	d_i	R_i	R_i recal.	signo
1	0.9	0.9	0.9	4	4	+
2	1.6	1.6	1.6	6	6	+
3	-2.4	-2.4	2.4	10	10	-
4	-2.1	-2.1	2.1	9	9	-
5	1	1	1	5	5	+
6	-0.5	-0.5	0.5	2	2.5	-
7	-2	-2	2	8	8	-
8	-1.9	-1.9	1.9	7	7	-
9	0.5	0.5	0.5	3	2.5	+
10	-0.3	-0.3	0.3	1	1	-

5. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon para datos pareados. Ejemplo (Solución) (II)

- Paso 2:
  - $n = 10 \ < \ 15$ → Se usa la Tabla A8 "Critical values for the Wilcoxon Signed Rank Test"
- Paso 3: $H_A: M_D \neq 0, \ \ \text{p}-\text{valor} = 2 \cdot min(P\{W \leq 17.5\}, \ P\{W \geq 17.5\}) \in 2 \cdot (0{,}1, 0.2) = (\mathbf{0.2}, \mathbf{0.4})$
  - $P\{W \leq 17.5\} \in (0.1, 0.2)$
  - $P\{W \geq 17.5\} \in (0.2, 1)$
- Paso 4: $\text{p}-\text{valor} \ > \ 0.05$
  - El **contraste de rangos con signo de Wilcoxon para datos pareados no puede rechazar $\boldsymbol{H_0}$**, por lo que con una confianza del 95%, Podemos concluir que estos datos no propocionan suficientes evidencias para poder afirmar que la mediana del peso antes y después de Navidad sea diferente

5. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon para datos pareados. Ejemplo (Solución) (III)

- NOTA sobre el paso 3: Otra forma de resolverlo
  - Como puede verse en la Tabla A8 “Critical values for the Wilcoxon Signed Rank Test”
  - Para $n = 10$ y $\alpha = 0.05$, la región de rechazo es:
    - $\{W_o \leq 10\} \cup \{W_o \geq 45\}$ por lo que $W_o = 17.5$ no está en la región de rechazo

n	α, left-tail probability for the left-tail test							α, right-tail probability for the right-tail test						
	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.200	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—	0	6	—	—	—	—	—	—
4	—	—	—	—	—	0	2	8	10	—	—	—	—	—
5	—	—	—	—	0	2	3	12	13	15	—	—	—	—
6	—	—	—	0	2	3	5	16	18	19	21	—	—	—
7	—	—	0	2	3	5	8	20	23	25	26	28	—	—
8	—	0	1	3	5	8	11	25	28	31	33	35	36	—
9	—	1	3	5	8	10	14	31	35	37	40	42	44	—
10	0	3	5	8	10	14	18	37	41	45	47	50	52	55

5. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon para datos pareados. Ejemplos reales (Artículos)

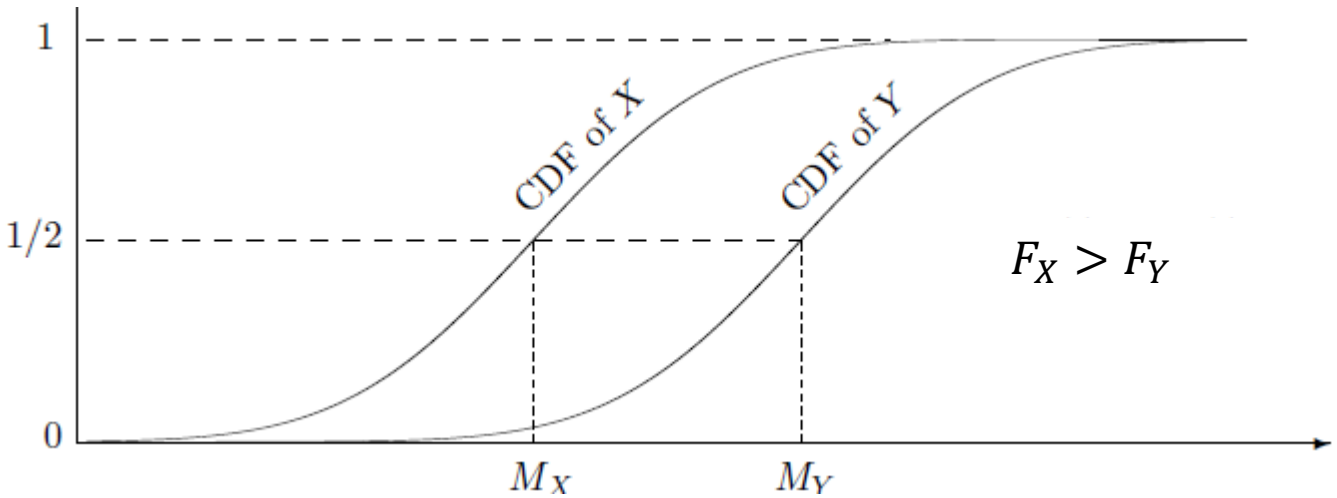
- Educación:
  - Batanero, C., et al. (2019). Effects of new supportive technologies for blind and deaf engineering students in online learning. IEEE Transactions on Education, 62(4), 270-277. *NOTA: En este artículo, donde aparece el estadístico W, realmente se refiere a una version estandarizada de W, la cual habitualmente en otras fuentes se denomina Z en vez de W.*
- Informática:
  - Safi, R., et al. (2022). Detecting Cybersecurity Threats: The Role of the Recency and Risk Compensating Effects. Information Systems Frontiers, 1-16.
- Economía:
  - Priyadi, Y., et al. (2022). Partnership Impact on Production and Income of Indonesia Rubber Farmers. Economics Development Analysis Journal, 11(3), 381-393.
- Medicina:
  - Hardy, A., et al. (2022). Improved clinical outcomes of outpatient enhanced recovery hip and knee replacements in comparison to standard inpatient procedures. Orthopaedics & Traumatology: Surgery & Research, 108(6), 103236.

6. Contraste de la suma de rangos con signo de Mann-Whitney-Wilcoxon para la diferencia de dos medianas poblacionales

- En inglés se denomina *Mann-Whitney-Wilcoxon rank sum test,* o también *Mann-Whitney test,* o bien *U-test*
- Es una extensión del contraste de rangos con signo de Wilcoxon pero aplicado a dos muestras independientes
- Lo que hace es comparar la función de distribución de probabilidad acumulada (F) de dos poblaciones independientes (X e Y) cuando se tienen dos muestras de las dos poblaciones con el mismo o diferente tamaño, y si las funciones son iguales, las medianas también lo son
  - $H_0 : F_X = F_Y$ Si se cumple, las medianas son iguales: $M_X = M_Y$
- Estadístico de contraste:
  - U = suma de los rangos (R_i) de las observaciones X_i en una muestra combinada con las muestras X_i e Y_i
  - $U = \sum_{i: X_i} R_i$
  - Muestras: $\{X_1, \dots, X_n\}$ $\{Y_1, \dots, Y_m\}$
- NOTA: Se asume que las distribuciones de X_i e Y_i son continuas

6. Contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon Hipótesis alternativa

- Posible hipótesis alternativa
  - $H_A: F_X > F_Y$
  - $H_A: F_X < F_Y$
  - $H_A: F_X \neq F_Y$
- Se cumple lo siguiente respecto a las medianas:
  - Si $F_X > F_Y$ entonces la mediana de X (M_X) es menor que la mediana de Y (M_Y) → $H_A: M_X < M_Y$
  - Si $F_X < F_Y$ entonces la mediana de X (M_X) es mayor que la mediana de Y (M_Y) → $H_A: M_X > M_Y$



6. Contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon Procedimiento

- Paso 1: Obtener el rango de cada observación (R_i) y calcular $U_o = \sum_{i:\, X_i} R_i$
- Paso 2: Determinar qué distribución de probabilidad utilizar para el estadístico U:
  - Si n ó $\mathrm{m} < 10$ entonces usar la función de masa de probabilidad recursiva siguiente:
    - $p_{n.m}(u) = \frac{m}{n+m} p_{n,m-1}(u) + \frac{m}{n+m} p_{n-1,m}(u-n-m)$
      (Tabla A9 del ibro)
  - Si n y $\mathrm{m} \geq 10$ entonces considerar que U tiene distribución Normal
    - $U \approx N\left(\frac{n(n+m+1)}{2}, \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}\right)$
      Con una estandarización y corrección de continuidad:
      - $P\{X \leq x\} \approx P\{X < x + 0.5\}$
      - $P\{X < x\} \approx P\{X < x - 0.5\}$
- Paso 3: Calcular el p-valor
  - $H_A: M_X > M_Y, \;\; \mathrm{p{-}valor} = P\{U \geq U_o\}$
  - $H_A: M_X < M_Y, \;\; \mathrm{p{-}valor} = P\{U \leq U_o\}$
  - $H_A: M_X \neq M_Y, \;\; \mathrm{p{-}valor} = 2 \cdot \min(P\{U \leq U_o\},\; P\{U \geq U_o\})$
- Paso 4: Llegar a una conclusión
  - Rechazar H_0 si $\mathrm{p{-}valor} < \alpha$ y aceptar H_A (Normalmente $\alpha = 0.05$)

6. Contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplo 10.14 (Incentivos en compras)

- Los responsables de un portal de compras por Internet sospechan que los clientes realizan más compras online si se les ofrece algún incentivo, como un descuento o devolución de efectivo
- Para verificar esta hipótesis, eligieron 12 días al azar, ofrecieron un descuento del 5 % en 6 días seleccionados al azar, y no ofrecieron ningún incentivo en los otros 6 días
- Los descuentos se indicaron en los enlaces que conducen a este portal de compra
- Con el descuento, el portal recibió (redondeado a 100): 1200, 1700, 2600, 1500, 2400 y 2100 visitas
- Sin el descuento, se registraron 1400, 900, 1300, 1800, 700 y 1000 visitas
- Con el 95 % de confianza, ¿esto apoya la hipótesis de los responsables?

6. Contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplo 10.14 (Solución) (I)

- Variable X = número de visitas sin descuento, n=6
- Variable Y = número de visitas con descuento, m=6
- Si F_X y F_Y son las funciones de distribución de probabilidad acumulada, necesitamos contrastar las siguientes hipótesis:
  - H_0: $F_X = F_Y$
  - H_A: $F_X > F_Y$ $\text{ por tanto } M_X < M_Y$
- Para calcular el valor observado del estadístico de contraste (U_o), hay que combinar todas las observaciones y ordenarlas, subrayando las observaciones de X:
  - <u>700</u>, <u>900</u>, <u>1000</u>, 1200, <u>1300</u>, <u>1400</u>, 1500, 1700, <u>1800</u>, 2100, 2400, 2600
  - En la muestra combinada, los rangos de X son 1, 2, 3, 5, 6, 9

6. Contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplo 10.14 (Solución) (II)

- Paso 1:
  - $U_o = \sum_{i:\, X_i} R_i = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9 = 26$
- Paso 2:
  - $\mathrm{n, m} = 6 < 10$ por tanto se usa la tabla A9 del libro
- Paso 3:
  - $H_A: M_X < M_Y, \quad \mathrm{p-valor} = P\{U \leq 26\} \leq 0.025$
- Paso 4: $\mathrm{p-valor} \; < \; \alpha = 0.05$
  - El **contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon rechaza $\boldsymbol{H_0}$**, por lo que con una confianza del 95%, esto apoya la sospecha de los responsables de que participan más usuarios en las compras online si se les ofrece un descuento

6. Contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplo 10.15 (Pings)

- Cuando se realiza una prueba de velocidad en Internet, se envía un mensaje de ida y vuelta a un destino (servidor), lo que se conoce como "ping"
- Se envían varios "pings" desde un ordenador a dos destinos diferentes y se obtienen los siguientes tiempos ordenados de menor a mayor
  - Destino 1: 0.0156, 0.0210, 0.0215, 0.0280, 0.0308, 0.0327, 0.0335, 0.0350, 0.0355, 0.0396, 0.0419, 0.0437, 0.0480, 0.0483, 0.0543 segundos
  - Destino 2: 0.0039, 0.0045, 0.0109, 0.0167, 0.0198, 0.0298, 0.0387, 0.0467, 0.0661, 0.0674, 0.0712, 0.0787 segundos
- Con un 95% de confianza, ¿Hay evidencias de que la mediana de la duración de los pings depende del destino?

6. Contraste Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplo 10.15 (Solución) (I)

- Variable X = tiempo al destino 1, $n = 15$
- Variable Y = tiempo al destino 2, $m = 12$
- Si F_X y F_Y son las distribuciones de distribución de probabilidad acumulada, hay que contrastar las siguientes hipótesis
  - H_0: $F_X = F_Y$
  - H_A: $F_X \neq F_Y$ por tanto $M_X \neq M_Y$
- Para calcular el valor observado del estadístico de contraste (U_o), se combinan todas las observaciones y se ordenan, subrayando las observaciones de X:
  - 0.0039, 0.0045, 0.0109, <u>0.0156</u>, 0.0167, 0.0198, <u>0.0210</u>, <u>0.0215</u>, <u>0.0280</u>, 0.0298, <u>0.0308</u>, <u>0.0327</u>, <u>0.0335</u>, <u>0.0350</u>, <u>0.0355</u>, 0.0387, <u>0.0396</u>, <u>0.0419</u>, <u>0.0437</u>, 0.0467, <u>0.0480</u>, <u>0.0483</u>, <u>0.0543</u>, 0.0661, 0.0674, 0.0712, 0.0787
  - En la muestra combinada, los rangos de X son: 4, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23

6. Contraste Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplo 10.15 (Solución) (II)

- Paso 1:
  - $U_o = \sum_{i:\, X_i} R_i = 213$
- Paso 2:
  - n=15, m =12 ≥ 10 por tanto $U \approx N\left(\frac{15(15+12+1)}{2}, \sqrt{\frac{15 \cdot 12(15+12+1)}{12}}\right) = N(210, 20.49)$
- Paso 3:
  - $H_A: M_X \neq M_Y$, $\text{p-valor} = 2 \cdot \min(P\{U \leq 213\},\ P\{U \geq 213\}) = 2 \cdot 0.4522 = \mathbf{0.9044}$
    - $P\{U \leq 213\} \approx P\left\{Z \leq \frac{213.5-210}{20.49}\right\} = P\{Z \leq 0.17\} = 0.5675$
    - $P\{U \geq 213\} = 1 - P\{U < 213\} \approx 1 - P\left\{Z < \frac{212.5-210}{20.49}\right\} = 1 - P\{Z < 0.12\} = 1 - 0.5478 = 0.4522$
- Paso 4: $\text{p-valor} = 0.9044 > \alpha = 0.05$
  - El **contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon no puede rechazar H_0**, por lo que con una confianza del 95% no hay evidencia de que los mensajes de prueba enviados a dos destinos diferentes tengan diferentes distribuciones ni, por tanto, diferentes medianas

6. Contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplo 10.16 (Competición)

- Dos fabricantes de ordenadores, A y B, compiten por un contrato
- Cada uno asegura que sus ordenadores son más rápidos
- Se decide ejecutar un mismo programa simultáneamente en 7 ordenadores de cada fabricante y comprobar en cuales termina anes la ejecución
- Como resultado, 2 ordenadores fabricados por A terminan primero, seguidos por 3 ordenadores fabricados por B, después 5 ordenadores fabricados por A, y finalmente 4 ordenadores fabricados por B
- No se han registrado los tiempos
- ¿Se puede afirmar con una confianza del 95% que los ordenadores fabricados por A son más rápidos?

6. Contraste Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplo 10.16 (Solution) (I)

- Como no se dispone de datos numéricos, se realiza un contraste no paramétrico
- Variable X_A = tiempo de ejecución del programa en un ordenador producido por A, $n = 7$
- Variable X_B = tiempo de ejecución del programa en un ordenador producido por B, $m = 7$
- Contraste de hipótesis
  - H_0: $F_{X_A} = F_{X_B}$
  - H_A: $F_{X_A} < F_{X_B}$ por tanto $M_{X_A} > M_{X_B}$
- Para calcular el valor del estadístico de contraste (U_o), se combinan todos los resultados de la competición:
  - A, A, B, B, B, A, A, A, A, A, B, B, B, B
  - En la muestra combinada, los rangos de X_A son: 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10

6. Contraste Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplo 10.16 (Solución) (II)

- Paso 1:
  - $U_o = \sum_{i:\, X_{A_i}} R_i = 43$
- Paso 2:
  - $\mathrm{n, m} = 7 < 10$ por tanto se usa la tabla A9 del libro
- Paso 3:
  - H_A: $M_{X_A} > M_{X_B}$, $\mathrm{p-valor} = P\{U \geq 43\} \in (0.2, 1)$
- Paso 4: $\mathrm{p-valor} > \alpha = 0.05$
  - El **contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon no puede rechazar $\boldsymbol{H_0}$**, por lo que con una confianza del 95% no hay evidencia significativa de que los ordenadores del fabricante A sean más rápidos

6. Contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplos reales (artículos)

- Informática:
  - Ordoñez-Briceño, K., et al. (2024). UML Profile to Model Accessible Web Pages. IEEE Access, 12, 77181-77213.
  - Daoudi, N., et al. (2022). A deep dive inside drebin: an explorative analysis beyond android malware detection scores. ACM Transactions on Privacy and Security, 25(2), 1-28.
- Economía:
  - Lekshmi, P., et al. (2022). Gender and small-scale fisheries: Contribution to livelihood and local economies. Marine Policy, 136, 104913.
- Geología:
  - Alruzuq, A., et al. (2023). Socio-hydrology and vulnerability of levee systems along the lower Illinois River. Annals of GIS, 1-19.
- Medicina:
  - Amawi, R., et al. (2022). Effects of pill colors on human perception and expectation of drugs' efficacy. Color Research & Application, 47(5), 1200-1215.

6. Contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon Ejercicios propuestos

- Ejercicios 10.20 a 10.25 del libro
  - Las respuestas de 10.21, 10.23 y 10.25 están en el libro

7. Resumen

- Un contraste de hipótesis no paramétrico se aplica cuando no hay evidencias de que los datos de una población tengan una distribución Normal
- También se utilizan cuando la muestra es pequeña, e incluso cuando los datos no son numéricos
- Dos posibles contrastes no paramétricos para una muestra son el de signos y el de rangos con signo de Wilcoxon
- El contraste de rangos con signo de Wilcoxon también se aplica en el caso de dos muestras pareadas
- Para dos muestras independientes se puede usar el contraste de la suma de rangos de Mann-Whitney-Wilcoxon