Contrastes de hipótesis no paramétricos

Contenidos adaptados del libro "Probability and statistics for computer scientists, Second edition, M. Baron" (Capítulo 10.2)

Contenido

1. Objetivos

- Conocer el papel de los contrastes de hipótesis no paramétricos
- Determinar en qué situaciones hay que aplicar un contraste no paramétrico
- Realizar contrastes de hipótesis no paramétricos para la mediana poblacional aplicando los métodos de signos, y de rangos con signo de Wilcoxon
- Realizar contrastes de hipótesis no paramétricos para la diferencia de medianas de dos poblaciones pareadas aplicando el método de rangos con signo de Wilcoxon
- Realizar contrastes de hipótesis no paramétricos para la diferencia de medianas de dos poblaciones independientes aplicando el método de la suma de rangos con signo de Mann-Whitney-Wilcoxon
- Analizar artículos con casos reales de aplicación de contrastes no paramétricos

2. Introducción

- Un contraste de hipótesis no paramétrico se aplica cuando no hay evidencias de que los datos de una población tengan una distribución Normal
  - Hay diferentes métodos para comprobar la normalidad de los datos: Chi-Square, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors, Anderson-Darling, Shapiro-Wilk, Cramér-von-Mises
  - El software estadístico (R, SPSS, Statgraphics, Excel, …) ofrece funcionalidad para comprobar la normalidad
  - En los ejercicios no será necesario comprobar la normalidad, ya que indicará si los datos de cada ejercicio son normales o no
- También se utiliza cuando no se dispone de datos numéricos concretos, sino de datos ordinales
  - Por ejemplo, no se dispone del precio exacto de varios ordenadores, pero se sabe los que están por debajo de un precio de referencia y los que están por encima de ese precio

2. Introducción
Tipos de contrastes no paramétricos

- Hipótesis sobre la mediana de una población
  - Contraste de signos
  - Contraste de rangos con signo de Wilcoxon (más preciso)
- Hipótesis sobre la diferencia de medianas de dos poblaciones
  - Si son poblaciónes relacionadas (pareadas)
    - Contraste de rangos con signo de Wilcoxon
  - Si son poblaciónes independientes
    - Contraste de la suma de rangos con signo de Mann-Whitney-Wilcoxon

3. Contraste de signos para la mediana poblacional

- En inglés se denomina *Sign test*
- Es un contraste no paramétrico para una población
- Es un contraste sobre el posible valor de la mediana poblacional (M)
    - $H_0: M = m_o$
- Consiste en comprobar si exactamente la mitad de la población está por debajo de un valor determinado m_o y la mitad está por encima de m_o
- Para llevar a cabo el contraste, sólo hay que contar cuántas observaciones están por encima de m_o
    - Estadístico de contraste: $S = \text{número de valores mayores que } m_o \text{ en una muestra de n valores}$
    - Muestra: $\{X_1, \dots, X_n\}$
    - S_o = Número de observaciones en la muestra mayores que m_o
- NOTA: Se asume que la distribución de X_i es continua, por tanto $P\{X_i = m_o\} = 0$, por lo que los valores iguales a m_o deben ser eliminados de la muestra

3. Contraste de signos
Datos considerados como signos

- Las observaciones de la muestra son consideradas como signos
  - $Si\ X_i > m_o \rightarrow signo\ +$
  - $Si\ X_i < m_o \rightarrow signo\ -$
  - $Si\ X_i = m_o \rightarrow signo\ 0$ (eliminar del conjunto de datos)
- Por tanto, el estadístico de contraste S puede considerarse como “número de signos positivos en una muestra de n datos”
- Ejemplo
  - $m = 3$
  - $Muestra = (3, 2, 5, 4, 7, 3, 6, 5, 8, 1)$
  - $Signos = (0, -, +, +, +, 0, +, +, +, -) = (-, +, +, +, +, +, +, -)$ Eliminando 0
  - Por lo que, $n = 8, S_o = 6$

3. Contraste de signos Procedimiento

- Paso 1: Eliminar las observaciones iguales a m_o y calcular el valor del estadístico de contraste
  - S_o= número de observaciones mayores que m_o
- Paso 2: Determinar si el estadístico de contraste es Binomial o Normal
  - Si n es pequeño, S tiene distribución Binomial $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$
    - Se suele aceptar que n es pequeño cuando < 30, y grande cuando ≥ 30
  - Si n es grande, S tiene distribución Normal $B\left(n, \frac{1}{2}\right) \approx N\left(\frac{n}{2}, \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$
    - Realizando una estandarización y corrección de continuidad $P\{X \leq x\} \approx P\{X \leq x - 0.5\}$
- Paso 3: Calcular el p-valor
  - $H_0: M = m_o$ vs $H_A: M > m_o$, $\;$ p−valor $= P\{S \geq S_o\}$
  - $H_0: M = m_o$ vs $H_A: M < m_o$, $\;$ p−valor $= P\{S \leq S_o\}$
  - $H_0: M = m_o$ vs $H_A: M \neq m_o$, $\;$ p−valor $= 2 \cdot \min(P\{S \leq S_o\},\ P\{S \geq S_o\})$
- Paso 4: Llegar a una conclusión
  - Rechazar H_0 si p−valor $< \alpha$ y aceptar H_A $\quad$ (Normalmente se considera $\alpha = 0.05$)

3. Contraste de signos
Ejemplo 10.9 (Uso sin autorización de una cuenta)

- El objetivo es detectar si una cuenta de ordenador fue utilizada por una persona no autorizada, midiendo los tiempos entre pulsaciones de teclas
- El propietario de la cuenta generalmente deja 0.2 segundos entre pulsaciones de teclas
- Los siguientes tiempos entre pulsaciones de tecla se registraron cuando un usuario escribió el nombre de usuario y la contraseña:
  - 0.24, 0.22, 0.26, 0.34, 0.35, 0.32, 0.33, 0.29, 0.19, 0.36, 0.30, 0.15, 0.17, 0.28, 0.38, 0.40, 0.37, 0.27 segundos
- Con un nivel de confianza del 95 %, ¿la cuenta fue utilizada por una persona no autorizada?

3. Contraste de signos
Ejemplo 10.9 (Solución) (I)

- En el ejemplo 9.28 se resolvió el mismo caso mediante un contraste paramétrico, asumiendo que los datos eran Normales
- Ahora asumimos que no son Normales y resolvemos el mismo ejemplo aplicando un contraste de signos
- Hipótesis:
  - H_0: $M = 0.2$
  - H_A: $M \neq 0.2$
- $n = 18,\ m_o = 0.2$
- $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$

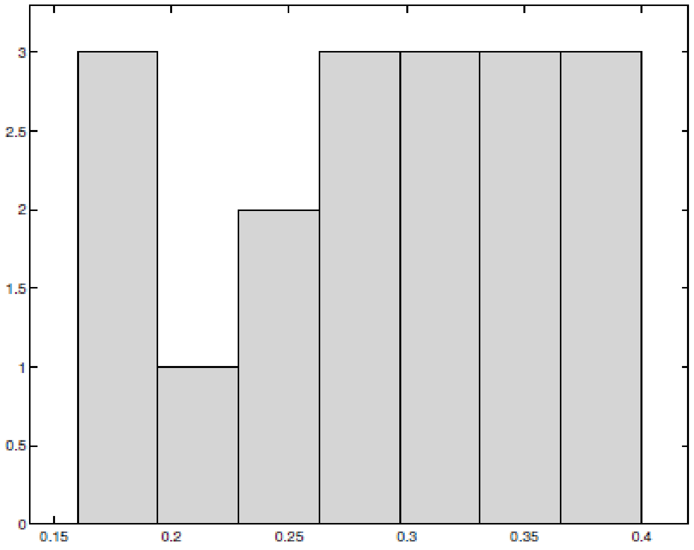


FIGURE 10.1: *The histogram of times*

3. Contraste de signos
Ejemplo 10.9 (Solución) (II)

- Paso 1:
  - $n = 18$, porque ningún tiempo registrado es igual a m_o (0.2)
  - $S_o = 15$, porque 15 de los 18 tiempos registrados son mayores que 0.2
- Paso 2: $n = 18$ es pequeño (< 30), por tanto S tiene distribución Binomial
  - $B\left(n, \frac{1}{2}\right) = B(18, 0.5)$
- Paso 3: H_A: $M \neq 0.2$ por tanto $\text{p}-\text{valor} = 2 \cdot \min(P\{S \leq S_{obs}\}, P\{S \geq S_{obs}\})$
  - $\text{p}-\text{valor} = 2 \cdot \min(P\{S \leq 15), P\{S \geq 15)\}) = 2 \cdot \min(P\{S \leq 15), 1 - P\{S \leq 14)\} = 2 \cdot \min(0.9993, 1 - 0.9962) = 2 \cdot 0.0038 = \mathbf{0.0076}$
    - Opción 1: Usando la tabla de la distribución Binomial
    - Opción 2: Calculando $P\{X \leq x\} = \sum_{k=o}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- Paso 4: $\text{p}-\text{valor} = 0.0076 < 0.05$ → **El contraste de signos rechaza H_0**, por lo que con un 95% de confianza, SÍ se puede afirmar que la cuenta fue usada por una persona no autorizada (Misma conclusion que en el ejemplo 9.28)
  - También podría afirmarse con un nivel de confianza del 99% ($1 - 0.0076 = 0.9924$)

3. Contraste de signos
Ejemplo 10.10 (Exceso de velocidad)

- Cuando Eric aprendió a conducir, sospechaba que la velocidad media de los coches en su camino a la escuela excede el límite de velocidad, que es de 30 mph
- Como experimento, conduce a la escuela con su amigo Evanne a una velocidad de 30 mph y Evanne cuenta los coches
- Al final, Evanne informa que 56 coches conducían más rápido que Eric, y 44 coches conducían más lento
- ¿Esto confirma la sospecha de Eric?
    - Con una confianza del 95%

3. Contraste de signos
Ejemplo 10.10 (Solución) (I)

- Hipótesis:
  - H_0: $M = 30$
  - H_A: $M > 30$
- $n = 100$
- $S_o = 56$
- $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$
- Este ejercicio utiliza datos ordinales
  - No es necesario conocer la velocidad exacta de cada coche para el contraste de signos

3. Contraste de signos
Ejemplo 10.10 (Solución) (II)

- Paso 1: $S_o = 56$, porque 56 de los 100 coches exceden 30 mph
- Paso 2: $n = 100$ es grande (≥ 30), por lo que S tiene una distribución Normal
  - $N\left(\frac{n}{2}, \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = N(50, 5)$
- Paso 3: H_A: $M > 30$ por lo que $\mathrm{p{-}valor} = P\{S \geq S_{obs}\} = P\{S \geq 56\} \approx P\{S \geq 55.5\} = P\left\{Z \geq \frac{55.5-50}{5}\right\} = P\{Z \geq 1.1\} = 1 - P\{Z \leq 1.1\} = 1 - 0.8643 = \mathbf{0.1357}$
  - Opción 1: Usando la table de la distribución Normal estándar
  - Opción 2: Calculando $P\{Z \leq z\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dx$
  - Nota: El cambio de 56 por 55.5 es debido a la corrección de continuidad
- Paso 4: $\mathrm{p{-}valor} = 0.1357 > 0.05$ → **El contraste de signos no puede rechazar H_0**, por lo que con una confianza del 95%, podemos concluir que Eric y Evanne no han encontrado una evidencia significativa para afirmar que la (mediana de la) velocidad de los coches es superior al límite de velocidad

3. Contraste de signos
Ejercicios propuestos

- Ejercicios 10.10 a 10.14 del libro
  - Las respuestas de 11.11 y 11.13 están en el libro

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon para la mediana poblacional

- En inglés se denomina *Wilcoxon signed rank test*
- Es un contraste no paramétrico para una población
- Es un contraste sobre el posible valor de la mediana poblacional (M)
  - $H_0: M = m_o$
- Se utiliza un estadístico de contraste W que representa la suma de las posiciones (llamadas rangos o ranks) que ocuparían, en una lista ordenada (ranking) de valores absolutos de la diferencia entre el valor de cada observación y la mediana muestral, aquellas observaciones que sean superiores a la mediana
    - $W = \sum_{i:\, X_i > m} R_i$
  - Muestra: $\{X_1, \dots, X_n\}$
  - Distancia de la observación X_i al valor m_o a contrastar con la mediana: $d_i = |X_i - m_o|$
  - R_i (rango o rank) es la posición que ocupa el valor de la distancia d_i cuando las distancias se ordenan de menor a mayor
  - Nota: Si dos o más d_i son iguales, entonces su rango debe recalcularse como la media sus valores
    - Ejemplo: Si d_6 y d_9 son iguales, R_6 y R_9 deben ser también iguales, y ambos se recalculan como $\frac{R_6+R_9}{2}$

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Datos considerados como signos

- Las observaciones de la muestra son consideradas como signos
  - $Si\ X_i > m_o \rightarrow signo\ +$
  - $Si\ X_i < m_o \rightarrow signo\ -$
  - $Si\ X_i = m_o \rightarrow signo\ 0$ (eliminar del conjunto de datos)
- W = suma de los rangos (ranks) de las distancias de las observaciones que tienen signo +

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Procedimiento

- Paso 1: : Eliminar las observaciones iguales m_o y calcular W_o
  - $W_o = \sum_{i:\, X_i > m} R_i$
- Paso 2: Determinar la distribución de probabilidad del estadístico de contraste W:
  - Si $\mathrm{n} < 15$ usar como función de masa de probabilidad: $f_n(x) = 0.5 f_{n-1}(x) + 0.5 f_{n-1}(x-n)$ (Tabla A8 del libro)
  - Si $\mathrm{n} \geq 15$ $\quad W \approx N\left(\frac{n(n+1)}{4}, \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}\right)$
    - Realizando una estandarización y corrección de continuidad $P\{X \leq x\} \approx P\{X \leq x - 0.5\}$
- Paso 3: Calcular el p-valor
  - $H_0\!: M = m \text{ vs } H_A\!: M > m, \mathrm{p{-}valor} = P\{W \geq W_o\}$
  - $H_0\!: M = m \text{ vs } H_A\!: M < m, \mathrm{p{-}valor} = P\{W \leq W_o\}$
  - $H_0\!: M = m \text{ vs } H_A\!: M \neq m,\ \mathrm{p{-}valor} = 2 \cdot \min(P\{W \leq W_o\},\ P\{W \geq W_o\})$
- Paso 4: Llegar a una conclusión
  - Rechazar H_0 si $\text{p-valor} < \alpha$ y aceptar H_A (Normalmente se considera $\alpha = 0.05$)

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Ejemplo 10.12 (Oferta y demanda)

- En una empresa hay que asegurarse de que las impresoras no se queden sin papel
- Se ha comprobado que durante 6 días la empresa ha consumido 7, 5.5, 9.5, 6, 3.5, y 9 paquetes de papel.
- Se puede suponer que las cantidades de papel usado son independientes en diferentes días, y los datos de esos 6 es una muestra aleatoria
- ¿Puede afirmarse, con un nivel de significación del 5%, que la mediana del consumo diario de papel es de más de 5 paquetes?

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Ejemplo 10.12 (Solución) (I)

- Hipótesis:
  - H_0: $M = 5$
  - H_A: $M > 5$
- $n = 6$
- $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$
- Paso 1:

$$W_o = \sum_{i:\, X_i > 5} R_i = 4 + 1 + 6 + 2 + 5 = 18$$

i	X_i	$X_i - 5$	d_i	R_i	**signo**
1	7	2	2	4	+
2	5.5	0.5	0.5	1	+
3	9.5	4.5	4.5	6	+
4	6	1	1	2	+
5	3.5	-1.5	1.5	3	-
6	9	4	4	5	+

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Ejemplo 10.12 (Solución) (II)

- Paso 2:
  - $n = 6 < 15$ → Usar Tabla A8 “Critical values for the Wilcoxon Signed Rank Test”
- Paso : $H_A\!: M > 5$, $\text{p}-\text{valor} = P\{W \geq 18\} \in (0.05, 0.1]$
  - Para un nivel de significación del 5% ($\alpha = 0.05$), según la tabla A8, la región de rechazo es $W_o \geq 19$

n	α, left-tail probability for the left-tail test							α, right-tail probability for the right-tail test						
	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.200	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—	0	6	—	—	—	—	—	—
4	—	—	—	—	—	0	2	8	10	—	—	—	—	—
5	—	—	—	—	0	2	3	12	13	15	—	—	—	—
6	—	—	—	0	2	3	5	16	18	19	21	—	—	—
7	—	—	0	2	3	5	8	20	23	25	26	28	—	—
8	—	0	1	3	5	8	11	25	28	31	33	35	36	—
9	—	1	3	5	8	10	14	31	35	37	40	42	44	—
10	0	3	5	8	10	14	18	37	41	45	47	50	52	55

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Ejemplo 10.12 (Solución) (III)

- Paso 4: $\mathrm{p{-}valor} > 0.05$
  - El **contraste de rangos con signo de Wilcoxon no puede rechazar $\boldsymbol{H_0}$**, por lo que con una confianza del 95 %, podemos concluir que estos datos no proporcionan evidencia significativa de que la mediana del consumo de papel supere los 5 paquetes por día.

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Ejemplo 10.13 (Uso no autorizado de una cuenta)

- El objetivo es detectar si una cuenta de un ordenador ha sido utilizada por una persona no autorizada, midiendo los tiempos entre pulsaciones de teclas
- El propietario de la cuenta generalmente tarda 0.2 segundos entre pulsaciones de teclas
- Se registraron los siguientes tiempos entre pulsaciones de tecla cuando un usuario escribió el nombre de usuario y la contraseña:
  - 0.24, 0.22, 0.26, 0.34, 0.35, 0.32, 0.33, 0.29, 0.19, 0.36, 0.30, 0.15, 0.17, 0.28, 0.38, 0.40, 0.37, 0.27 segundos
- Con un nivel de confianza del 95 %, ¿se puede afirmar que la cuenta fue utilizada por una persona no autorizada?
- Es el mismo ejemplo que 10.9, pero ahora resolviéndolo con un contraste de rangos con signo de Wilcoxon

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Ejemplo 10.13 (Solución) (I)

- Hipótesis:
  - H_0: $M = 0.2$
  - H_A: $M \neq 0.2$
- $n = 18$
- $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$
- Paso 1:

$$W_o = \sum_{i:\, X_i > 0.2} R_i$$

$$= 4 + 2 + 6 + 13 + 14 + 11 + 12 + 9 + 15 + 10 + 8 + 17 + 18 + 16 + 7 = 162$$

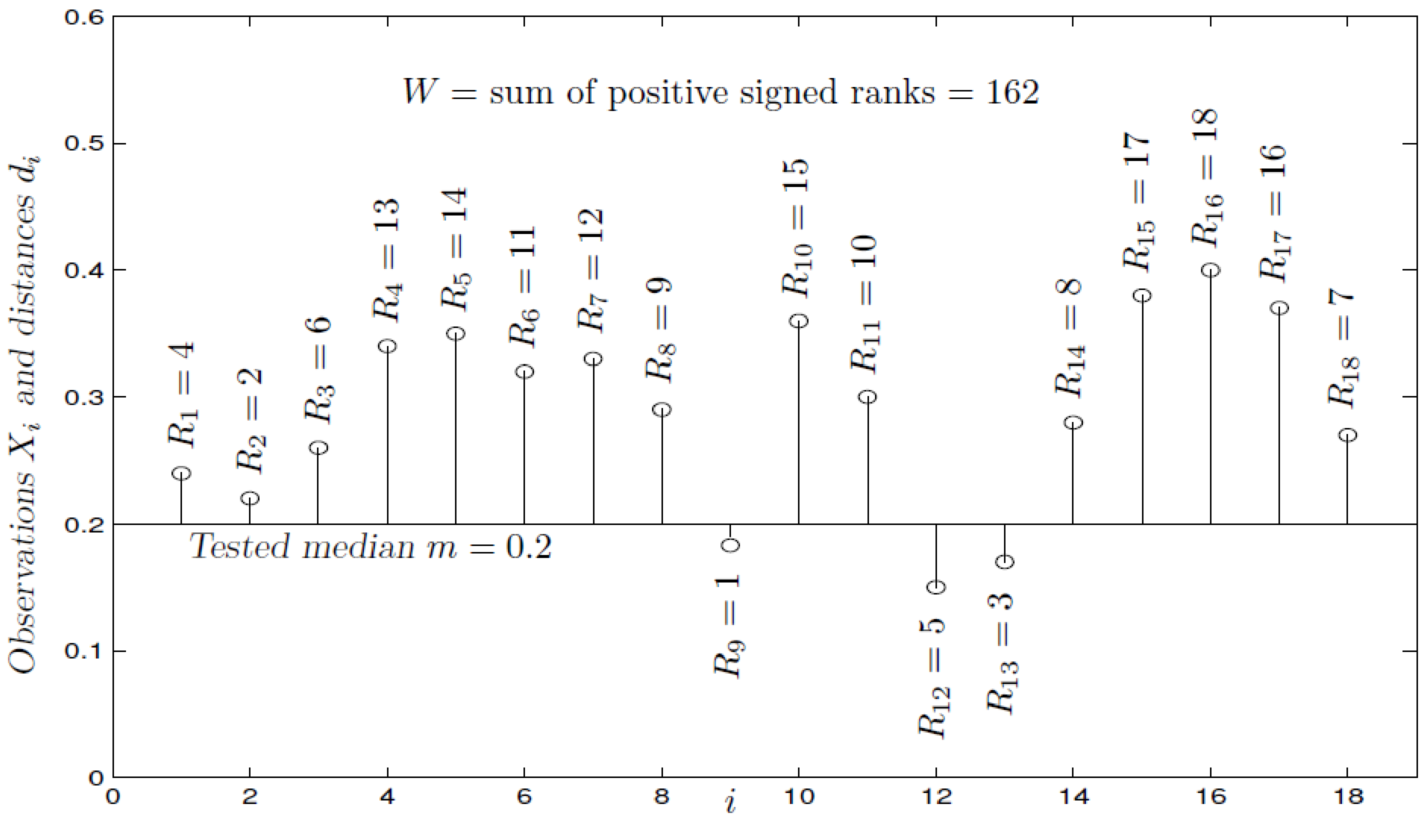


FIGURE 10.3: *Ranks of distances $d_i = |X_i - m|$ for the Wilcoxon signed rank test.*

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Ejemplo 10.13 (Solución) (II)

- Paso 2:
  - $\mathrm{n{=}18} \geq 15 \quad W \approx N\left(\frac{n(n+1)}{4}, \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}\right) = N(85.5, 23)$
- Paso 3: $H_A: M \neq 0.2, \quad \mathrm{p{-}valor} = 2 \cdot \min(P\{W \leq 162\},\ P\{W \geq 162\})$
  - $P\{W \geq 162\} \approx P\{W \geq 161.5\} = P\left\{Z \geq \frac{161.5-85.5}{23}\right\} = P\{Z \geq 3.30\} = 1 - P\{Z \leq 3.30\} = 1 - 0.9995 = 0.0005$
  - $P\{W \leq 162\} \approx P\{W \leq 161.5\} = P\left\{Z \leq \frac{161.5-85.5}{23}\right\} = P\{Z \leq 3.30\} = 0.9995$
  - $\mathrm{p{-}valor} = 2 \cdot \min(0.0005, 0.9995) = 2 \cdot 0.0005 = \mathbf{0.001}$
- Paso 4: $\mathrm{p{-}valor} = 0.001 < 0.05$
  - El **contraste de rangos con signo de Wilcoxon rechaza $\boldsymbol{H_0}$**, por lo que SÍ hay evidencias para afirmar con un 95% de confianza que la cuente ha sido usada por una persona no autorizada

4. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon Ejercicios propuestos

- Ejercicios 10.15 a 10.19 del libro
  - La respuestas de 10.16 y 10.18 están en el libro

5. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon para la diferencia de dos medianas poblacionales

- En inglés se denomina *Wilcoxon signed rank paired test*
- Se aplica al caso de dos muestras dependientes (pareadas), para comprobar si sus poblaciones tienen la misma mediana
- En las dos poblaciones se obtienen las observaciones de las dos muestras sobre una misma propiedad de los mismos individuos, normalmente son valores antes y después de realizar alguna actuación sobre los individuos.
    - Por ejemplo, el peso antes y después de hacer una dieta
- Muestras: $\{X_1, \dots, X_n\}$ $\{Y_1, \dots, Y_n\}$
- H_0: $M_X = M_Y$
- La hipótesis puede reformularse como que la mediana de las diferencias sea igual a cero
    - Diferencias: $D = \{D_1, \dots, D_n\} = \{X_1 - Y_1, \dots, X_n - Y_n\}$
    - $H_0: M_D = 0$
- Y aplicar el conocido contraste de rangos con signo de Wilcoxon para un sola muestra

5. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon para datos pareados. Ejemplo (Pesos)

- Conocemos los pesos de 10 personas antes y después de Navidad, y esos pesos no tienen una distribución normal
- Con un nivel de confianza del 95%, ¿se puede afirmar que no ha habido cambio en el peso?

Persona	Peso antes (X_i)	Peso después (Y_i)	Diferencia $D_i = Xi - Yi$
1	90.1	89.2	0.9
2	97.7	96.1	1.6
3	66.1	68.5	-2.4
4	65.3	67.4	-2.1
5	70.6	69.6	1
6	98.4	98.9	-0.5
7	65.2	67.2	-2
8	88.2	90.1	-1.9
9	90.4	89.9	0.5
10	90.8	91.1	-0.3

5. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon para datos pareados. Ejemplo (Pesos) (Solución) (I)

- Hipótesis:
  - $H_0\colon M_D = 0$
  - $H_A\colon M_D \neq 0$
- $n = 10$
- $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$
- Paso 1:
  - $W_o = \sum_{i:\, D_i > 0} R_i = 4 + 6 + 5 + 2.5 = 17.5$
  - NOTA: Como d_6 y d_9 son iguales, R_6 y R_9 se recalculan como:
    - $\frac{R_6 + R_9}{2} = \frac{2+3}{2} = 2.5$

Persona	D_i	$D_i - 0$	d_i	R_i	R_i recal.	signo
1	0.9	0.9	0.9	4	4	+
2	1.6	1.6	1.6	6	6	+
3	-2.4	-2.4	2.4	10	10	-
4	-2.1	-2.1	2.1	9	9	-
5	1	1	1	5	5	+
6	-0.5	-0.5	0.5	2	2.5	-
7	-2	-2	2	8	8	-
8	-1.9	-1.9	1.9	7	7	-
9	0.5	0.5	0.5	3	2.5	+
10	-0.3	-0.3	0.3	1	1	-

5. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon para datos pareados. Ejemplo (Solución) (II)

- Paso 2:
  - $n = 10 < 15$ → Se usa la Tabla A8 "Critical values for the Wilcoxon Signed Rank Test"
- Paso 3: $H_A\colon M_D \neq 0,\ \ \text{p}-\text{valor} = 2 \cdot min(P\{W \leq 17.5\},\ P\{W \geq 17.5\}) \in 2 \cdot (0{,}1, 0.2) = (\mathbf{0.2}, \mathbf{0.4})$
  - $P\{W \leq 17.5\} \in (0.1, 0.2)$
  - $P\{W \geq 17.5\} \in (1, 0.2)$
- Paso 4: $\text{p}-\text{valor} < 0.05$
  - El **contraste de rangos con signo de Wilcoxon para datos pareados no puede rechazar $\boldsymbol{H_0}$**, por lo que con una confianza del 95%, Podemos concluir que estos datos no propocionan suficientes evidencias para poder afirmar que la mediana del peso antes y después de Navidad sea diferente

5. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon para datos pareados. Ejemplo (Solución) (III)

- NOTA sobre el paso 3: Otra forma de resolverlo
  - Como puede verse en la Tabla A8 “Critical values for the Wilcoxon Signed Rank Test”
  - Para $n = 10$ y $\alpha = 0.05$, la región de rechazo es:
    - $\{W_o \leq 10\} \cup \{W_o \geq 45\}$ por lo que $W_o = 17.5$ no está en la región de rechazo

n	α, left-tail probability for the left-tail test							α, right-tail probability for the right-tail test						
	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.200	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—	0	6	—	—	—	—	—	—
4	—	—	—	—	—	0	2	8	10	—	—	—	—	—
5	—	—	—	—	0	2	3	12	13	15	—	—	—	—
6	—	—	—	0	2	3	5	16	18	19	21	—	—	—
7	—	—	0	2	3	5	8	20	23	25	26	28	—	—
8	—	0	1	3	5	8	11	25	28	31	33	35	36	—
9	—	1	3	5	8	10	14	31	35	37	40	42	44	—
10	0	3	5	8	10	14	18	37	41	45	47	50	52	55

5. Contraste de rangos con signo de Wilcoxon para datos pareados. Ejemplos reales (Artículos)

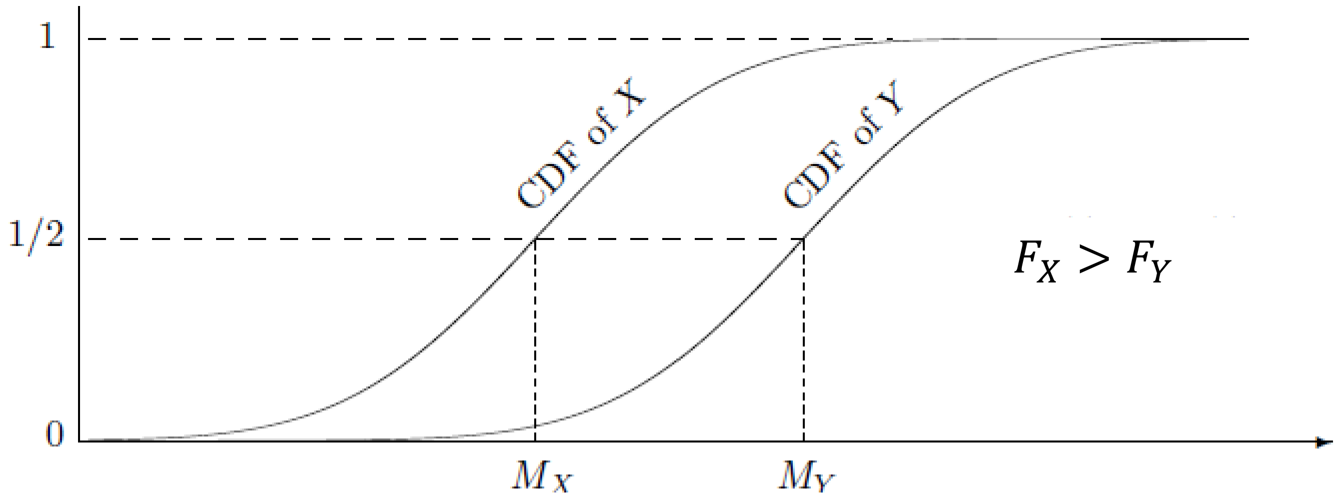
- Educación:
  - Batanero, C., et al. (2019). Effects of new supportive technologies for blind and deaf engineering students in online learning. IEEE Transactions on Education, 62(4), 270-277. *NOTA: En este artículo, donde aparece el estadístico W, realmente se refiere a una version estandarizada de W, la cual habitualmente en otras fuentes se denomina Z en vez de W.*
- Informática:
  - Safi, R., et al. (2022). Detecting Cybersecurity Threats: The Role of the Recency and Risk Compensating Effects. Information Systems Frontiers, 1-16.
- Economía:
  - Priyadi, Y., et al. (2022). Partnership Impact on Production and Income of Indonesia Rubber Farmers. Economics Development Analysis Journal, 11(3), 381-393.
- Medicina:
  - Hardy, A., et al. (2022). Improved clinical outcomes of outpatient enhanced recovery hip and knee replacements in comparison to standard inpatient procedures. Orthopaedics & Traumatology: Surgery & Research, 108(6), 103236.

6. Contraste de la suma de rangos con signo de Mann-Whitney-Wilcoxon para la diferencia de dos medianas poblacionales

- En inglés se denomina *Mann-Whitney-Wilcoxon rank sum test,* o también *Mann-Whitney test,* o bien *U-test*
- Es una extensión del contraste de rangos con signo de Wilcoxon pero aplicado a dos muestras independientes
- Lo que hace es comparar la función de distribución de probabilidad acumulada (F) de dos poblaciones independientes (X e Y) cuando se tienen dos muestras de las dos poblaciones con el mismo o diferente tamaño, y si las funciones son iguales, las medianas también lo son
  - $H_0 : F_X = F_Y$ Si se cumple, las medianas son iguales: $M_X = M_Y$
- Estadístico de contraste:
  - U = suma de los rangos (R_i) de las observaciones X_i en una muestra combinada con las muestras X_i e Y_i
  - $U = \sum_{i:\, X_i} R_i$
  - Muestras: $\{X_1, \dots, X_n\}$ $\{Y_1, \dots, Y_m\}$
- NOTA: Se asume que las distribuciones de X_i e Y_i son continuas

6. Contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon Hipótesis alternativa

- Posible hipótesis alternativa
  - $H_A: F_X > F_Y$
  - $H_A: F_X < F_Y$
  - $H_A: F_X \neq F_Y$
- Se cumple lo siguiente respecto a las medianas:
  - Si $F_X > F_Y$ entonces la mediana de X (M_X) es menor que la mediana de Y (M_Y) → $H_A: M_X < M_Y$
  - Si $F_X < F_Y$ entonces la mediana de X (M_X) es mayor que la mediana de Y (M_Y) → $H_A: M_X > M_Y$



6. Contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon Procedimiento

- Paso 1: Obtener el rango de cada observación (R_i) y calcular $U_o = \sum_{i:\, X_i} R_i$
- Paso 2: Determinar qué distribución de probabilidad utilizar para el estadístico U:
    - Si $\mathrm{n, m} < 10$ entonces usar la función de masa de probabilidad recursiva siguiente:
        - $p_{n.m}(u) = \frac{m}{n+m} p_{n,m-1}(u) + \frac{m}{n+m} p_{n-1,m}(u-n-m)$
          (Tabla A9 del ibro)
    - Si $\mathrm{n, m} < 10$ entonces considerar que U tiene distribución Normal
        - $U \approx N\left(\frac{n(n+m+1)}{2}, \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}\right)$
          Con una estandarización y corrección de continuidad: $P\{U \leq u\} \approx P\{U \leq u - 0.5\}$
- Paso 3: Calcular el p-valor
    - $H_A\colon M_X > M_Y,\ \ \mathrm{p{-}valor} = P\{U \geq U_o\}$
    - $H_A\colon M_X < M_Y,\ \ \mathrm{p{-}valor} = P\{U \leq U_o\}$
    - $H_A\colon M_X \neq M_Y,\ \ \mathrm{p{-}valor} = 2 \cdot \min(P\{U \leq U_o\},\ P\{U \geq U_o\})$
- Paso 4: Llegar a una conclusión
    - Rechazar H_0 si $\mathrm{p{-}valor} < \alpha$ y aceptar H_A (Normalmente $\alpha = 0.05$)

6. Contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplo 10.14 (Incentivos en compras)

- Los responsables de un portal de compras por Internet sospechan que los clientes realizan más compras online si se les ofrece algún incentivo, como un descuento o devolución de efectivo
- Para verificar esta hipótesis, eligieron 12 días al azar, ofrecieron un descuento del 5 % en 6 días seleccionados al azar, y no ofrecieron ningún incentivo en los otros 6 días
- Los descuentos se indicaron en los enlaces que conducen a este portal de compra
- Con el descuento, el portal recibió (redondeado a 100): 1200, 1700, 2600, 1500, 2400 y 2100 visitas
- Sin el descuento, se registraron 1400, 900, 1300, 1800, 700 y 1000 visitas
- Con el 95 % de confianza, ¿esto apoya la hipótesis de los responsables?

6. Contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplo 10.14 (Solución) (I)

- Variable X = número de visitas sin descuento, n=6
- Variable Y = número de visitas con descuento, m=6
- Si F_X y F_Y son las funciones de distribución de probabilidad acumulada, necesitamos contrastar las siguientes hipótesis:
  - H_0: $F_X = F_Y$
  - H_A: $F_X > F_Y$ por tanto $M_X < M_Y$
- Para calcular el estadístico de contraste (U_o), hay que combinar todas las observaciones y ordenarlas, subrayando las observaciones de X:
  - <u>700</u>, <u>900</u>, <u>1000</u>, 1200, <u>1300</u>, <u>1400</u>, 1500, 1700, <u>1800</u>, 2100, 2400, 2600
  - En la muestra combinada, los rangos de X son 1, 2, 3, 5, 6, 9

6. Contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplo 10.14 (Solución) (II)

- Paso 1:
  - $U_o = \sum_{i:\, X_i} R_i = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9 = 26$
- Paso 2:
  - $\text{n, m} = 6 < 10$ por tanto se usa la tabla A9 del libro
- Paso 3:
  - $H_A: M_X < M_Y, \quad \text{p−valor} = P\{U \leq 26\} \leq 0.025$
- Paso 4: $\text{p−valor} \; < \; \alpha = 0.05$
  - El **contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon rechaza $\boldsymbol{H_0}$**, por lo que con una confianza del 95%, esto apoya la sospecha de los responsables de que participan más usuarios en las compras online si se les ofrece un descuento

6. Contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplo 10.15 (Pings)

- Cuando se realiza una prueba de velocidad en Internet, se envía un mensaje de ida y vuelta a un destino (servidor), lo que se conoce como “ping”
- Se envían varios “pings” desde un ordenador a dos destinos diferentes y se obtienen los siguientes tiempos ordenados de menor a mayor
  - Destino 1: 0.0156, 0.0210, 0.0215, 0.0280, 0.0308, 0.0327, 0.0335, 0.0350, 0.0355, 0.0396, 0.0419, 0.0437, 0.0480, 0.0483, 0.0543 segundos
  - Destino 2: 0.0039, 0.0045, 0.0109, 0.0167, 0.0198, 0.0298, 0.0387, 0.0467, 0.0661, 0.0674, 0.0712, 0.0787 segundos
- Con un 95% de confianza, ¿Hay evidencias de que la mediana de la duración de los pings depende del destino?

6. Contraste Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplo 10.15 (Solución) (I)

- Variable X = tiempo al destino 1, $n = 15$
- Variable Y = tiempo al destino 2, $m = 12$
- Si F_X y F_Y son las distribuciones de distribución de probabilidad acumulada, hay que contrastar las siguientes hipótesis
  - H_0: $F_X = F_Y$
  - H_A: $F_X \neq F_Y$ por tanto $M_X \neq M_Y$
- Para calcular el valor del estadístico de contraste (U_{obs}), se combinan todas las observaciones y se ordenan, subrayando las observaciones de X:
  - 0.0039, 0.0045, 0.0109, $\underline{0.0156}$, 0.0167, 0.0198, $\underline{0.0210}$, $\underline{0.0215}$, $\underline{0.0280}$, 0.0298, $\underline{0.0308}$, $\underline{0.0327}$, $\underline{0.0335}$, $\underline{0.0350}$, $\underline{0.0355}$, 0.0387, $\underline{0.0396}$, $\underline{0.0419}$, $\underline{0.0437}$, 0.0467, $\underline{0.0480}$, $\underline{0.0483}$, $\underline{0.0543}$, 0.0661, 0.0674, 0.0712, 0.0787
  - En la muestra combinada, los rangos de X son: 4, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23

6. Contraste Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplo 10.15 (Solución) (II)

- Paso 1:
  - $U_o = \sum_{i:\, X_i} R_i = 213$
- Paso 2:
  - n=15, m =12 ≥ 10 por tanto $U \approx N\left(\frac{15(15+12+1)}{2}, \sqrt{\frac{15 \cdot 12(15+12+1)}{12}}\right) = N(210, 20.49)$
- Paso 3:
  - $H_A\!: M_X \neq M_Y,\;$ p$-$valor $= 2 \cdot \min(P\{U \leq 213\},\; P\{U \geq 213\}) = 2 \cdot 0.4522 = \mathbf{0.9044}$
    - $P\{U \leq 213\} \approx P\left\{Z \leq \frac{213.5-210}{20.49}\right\} = P\{Z \leq 0.17\} = 0.5675$
    - $P\{U \geq 213\} \approx P\left\{Z \geq \frac{212.5-210}{20.49}\right\} = P\{Z \geq 0.12\} = 1 - P\{Z \leq 0.12\} = 1 - 0.5478 = 0.4522$
- Paso 4: p-valor $= 0.9044 > \alpha = 0.05$
  - El **contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon no puede rechazar $\boldsymbol{H_0}$**, por lo que con una confianza del 95% no hay evidencia de que los mensajes de prueba enviados a dos destinos diferentes tengan diferentes distribuciones ni, por tanto, diferentes medianas

6. Contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplo 10.16 (Competición)

- Dos fabricantes de ordenadores, A y B, compiten por un contrato
- Cada uno asegura que sus ordenadores son más rápidos
- Se decide ejecutar un mismo programa simultáneamente en 7 ordenadores de cada fabricante y comprobar en cuales termina anes la ejecución
- Como resultado, 2 ordenadores fabricados por A terminan primero, seguidos por 3 ordenadores fabricados por B, después 5 ordenadores fabricados por A, y finalmente 4 ordenadores fabricados por B
- No se han registrado los tiempos
- ¿Se puede afirmar con una confianza del 95% que los ordenadores fabricados por A son más rápidos?

6. Contraste Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplo 10.16 (Solution) (I)

- Como no se dispone de datos numéricos, se realiza un contraste no paramétrico
- Variable X_A = tiempo de ejecución del programa en un ordenador producido por A, $n = 7$
- Variable X_B = tiempo de ejecución del programa en un ordenador producido por B, $m = 7$
- Contraste de hipótesis
  - H_0: $F_{X_A} = F_{X_B}$
  - H_A: $F_{X_A} < F_{X_B}$ por tanto $M_{X_A} > M_{X_B}$
- Para calcular el valor del estadístico de contraste (U_{obs}), se combinan todos los resultados de la competición:
  - A, A, B, B, B, A, A, A, A, A, B, B, B, B
  - En la muestra combinada, los rangos de X_A son: 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10

6. Contraste Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplo 10.16 (Solución) (II)

- Paso 1:
  - $U_o = \sum_{i:\, X_{A_i}} R_i = 43$
- Paso 2:
  - n, m $=7 < 10$ por tanto se usa la tabla A9 del libro
- Paso 3:
  - H_A: $M_{X_A} > M_{X_B}$, p$-$valor $= P\{U \geq 43\} \in (0.2, 1)$
- Paso 4: p$-$valor $> \alpha = 0.05$
  - El **contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon no puede rechazar $\boldsymbol{H_0}$**, por lo que con una confianza del 95% no hay evidencia significativa de que los ordenadores del fabricante A sean más rápidos

6. Contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon Ejemplos reales (artículos)

- Informática:
  - Ordoñez-Briceño, K., et al. (2024). UML Profile to Model Accessible Web Pages. IEEE Access, 12, 77181-77213.
  - Daoudi, N., et al. (2022). A deep dive inside drebin: an explorative analysis beyond android malware detection scores. ACM Transactions on Privacy and Security, 25(2), 1-28.
- Economía:
  - Lekshmi, P., et al. (2022). Gender and small-scale fisheries: Contribution to livelihood and local economies. Marine Policy, 136, 104913.
- Geología:
  - Alruzuq, A., et al. (2023). Socio-hydrology and vulnerability of levee systems along the lower Illinois River. Annals of GIS, 1-19.
- Medicina:
  - Amawi, R., et al. (2022). Effects of pill colors on human perception and expectation of drugs' efficacy. Color Research & Application, 47(5), 1200-1215.

6. Contraste de Mann-Whitney-Wilcoxon Ejercicios propuestos

- Ejercicios 10.20 a 10.25 del libro
  - Las respuestas de 10.21, 10.23 y 10.25 están en el libro

7. Resumen

- Un contraste de hipótesis no paramétrico se aplica cuando no hay evidencias de que los datos de una población tengan una distribución Normal
- También se utilizan cuando la muestra es pequeña, e incluso cuando los datos no son numéricos
- Dos posibles contrastes no paramétricos para una muestra son el de signos y el de rangos con signo de Wilcoxon
- El contraste de rangos con signo de Wilcoxon también se aplica en el caso de dos muestras pareadas
- Para dos muestras independientes se puede usar el contraste de la suma de rangos de Mann-Whitney-Wilcoxon