Variables aleatorias continuas y sus distribuciones de probabilidad

Contenidos adaptados del libro "Probabilidad y estadística para informáticos, segunda edición, M. Baron" (Capítulo 4)

Contenido

1. Objetivos
2. Distribución de una variable aleatoria continua
3. Características de una variable aleatoria continua
4. Distribución Uniforme
5. Distribución Exponencial
6. Distribución Gamma
7. Distribución Normal
8. Teorema Central del Límite
9. Distribución T de Student
10. Distribución Chi-cuadrado
11. Distribución F
12. Resumen

1. Objetivos

- Diferenciar entre distribución de probabilidad discreta y continua
- Calcular probabilidades, esperanzas, varianzas y desviaciones estándar de variables aleatorias continuas con distribución Uniforme, Exponencial, Gamma y Normal
- Reconocer situaciones en las cuales es apropiado considerar la relevancia de alguna de las distribuciones continuas
- Aplicar el Teorema Central del Límite con una corrección de continuidad, para aproximar una distribución Binomial a una Normal

2. Distribución de una variable aleatoria continua Concepto de variable aleatoria continua

- Es una variable aleatoria cuyo rango es un intervalo completo de valores.
  - Puede ser un intervalo delimitado (a, b), o un intervalo sin límites como $(a,+\infty)$, $(-\infty, b)$, o $(-\infty, +\infty)$.
  - También puede ser una unión de varios de estos intervalos.
  - Los intervalos son incontables, por lo tanto, todos los valores de una variable aleatoria no se pueden enumerar.
- Ejemplos de variables continuas incluyen medidas de tiempo (tiempo de instalación de software, tiempo de ejecución de código, tiempo de conexión, tiempo de espera, vida útil, tiempo de descarga, tiempo de falla), también medidas físicas como peso, altura, voltaje, temperatura, distancia, velocidad de conexión, etc.
- **Nota: En una variable continua, entre dos valores cualesquiera siempre hay otro valor posible.**

2. Distribución de una variable aleatoria continua Definiciones

- La distribución de una variable aleatoria continua X es una asignación de probabilidades a intervalos de valores de X.
- La **función de densidad de probabilidad** de X, o pdf (*probability density function*), se define como $f(x)$ tal que:
  - $P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx$
- La **función de distribución acumulada**, o cdf (*cumulative distribution function*), se define como:
  - $F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

2. Distribución de una variable aleatoria continua Familias de distribuciones continuas

- Como en el caso discreto, muchos fenómenos pueden ser descritos por relativamente pocas familias de distribuciones continuas.
- Las distribuciones continuas más utilizadas son las distribuciones:
  - Uniforme
  - Exponencial
  - Gamma
  - Normal
  - T de Student
  - Chi-Cuadrado
  - F

2. Distribución de una variable aleatoria continua Propiedades

- Si X es una variable aleatoria continua
  - $P\{X = x\} = 0$
  - $P\{X \leq x\} = P\{X < x\} = F(x)$
  - $P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

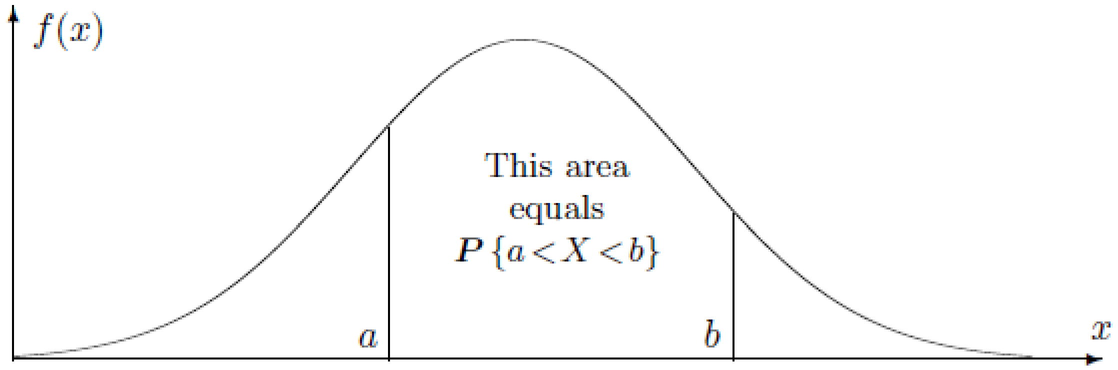


FIGURE 4.1: *Probabilities are areas under the density curve.*

2. Distribución de una variable aleatoria continua Comparación con distribución discreta

Distribución	Discreta	Continua
Función de masa/densidad de probabilidad (pmf/pdf)	$P(x) = P\{X = x\}$	$f(x)$
Probabilidad de un rango	$P\{a \leq X \leq b\} = \sum_{i=\mathrm{a}}^{b} P(i)$	$P\{a \leq X \leq b\} = P\{a < X < b\} = \int_{a}^{b} f(x)dx$
Función de distribución acumulada (cdf)	$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{i=\min(X)}^{x} P(i)$	$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
Probabilidad total	$\sum_{x=\min(X)}^{\max(X)} P(x) = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

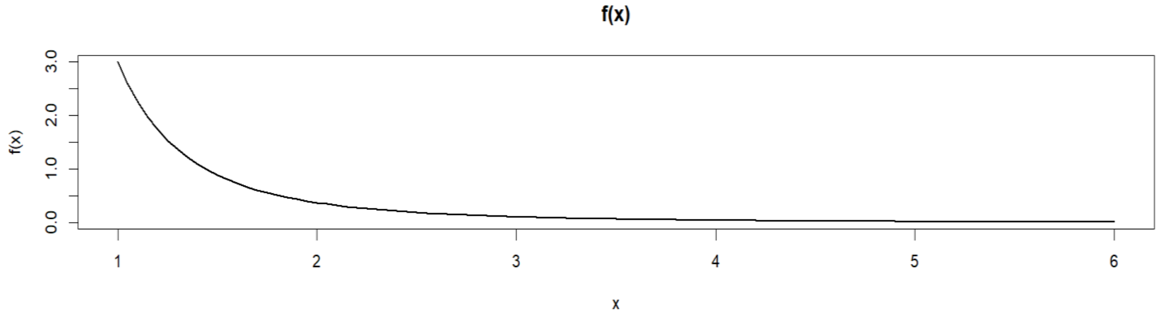
2. Distribución de una variable aleatoria continua Ejemplo 4.1 (Vida de un componente electrónico)

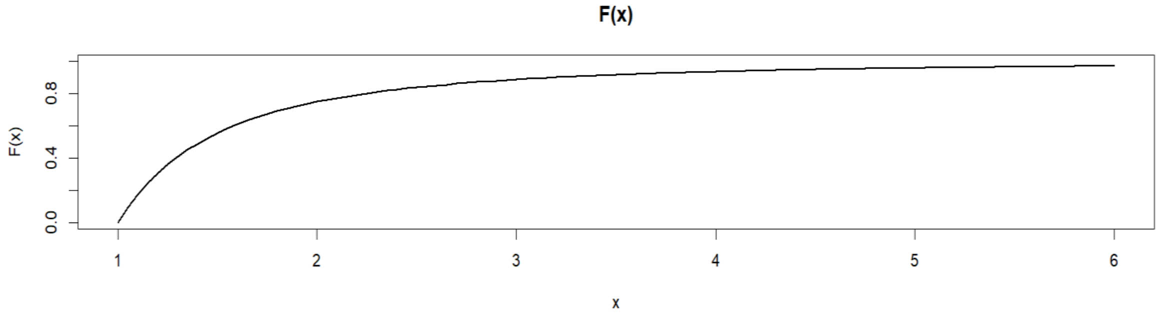
- La vida útil, en años, de un componente electrónico es una variable aleatoria continua con la función de densidad de probabilidad
  - $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$
- Preguntas
  a) Dibujar f(x) y F(x)
  b) Calcular la probabilidad de que la vida útil supere los 5 años
  c) Calcular la probabilidad de que la vida útil sea menos de 3 años
  d) Calcular la probabilidad de que la vida útil esté entre 2 y 4 años

2. Distribución de una variable aleatoria continua Ejemplo 4.1 (Solución)(a)

a) Dibujar f(x) y F(x)

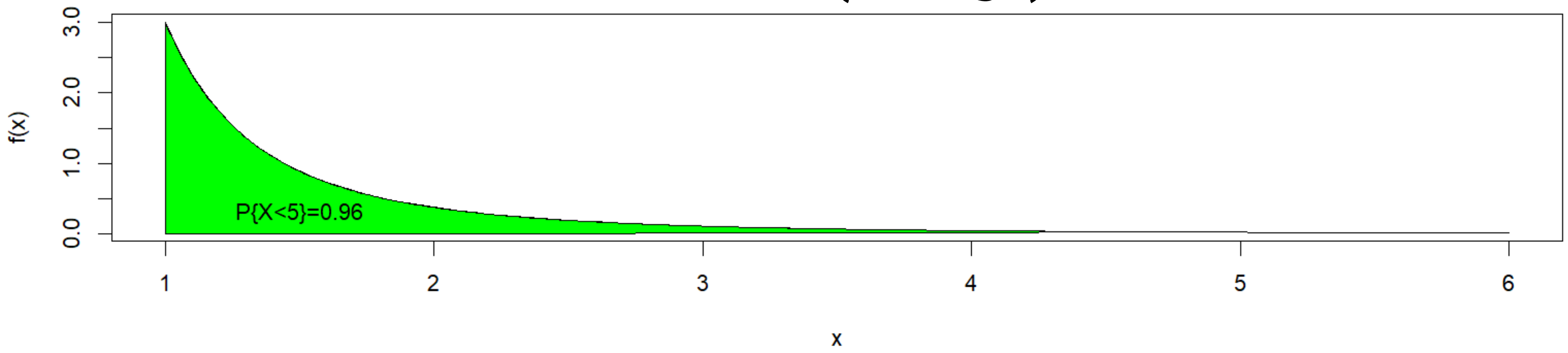
- $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}, \ x \geq 1 \\ 0, \ x < 1 \end{cases}$
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{1}^{x} \frac{2}{t^3} dt = -\frac{1}{t^2}\Big|_{t\,=\,1}^{\;x} = 1 - \frac{1}{x^2}$ (Recordar el cálculo integral)

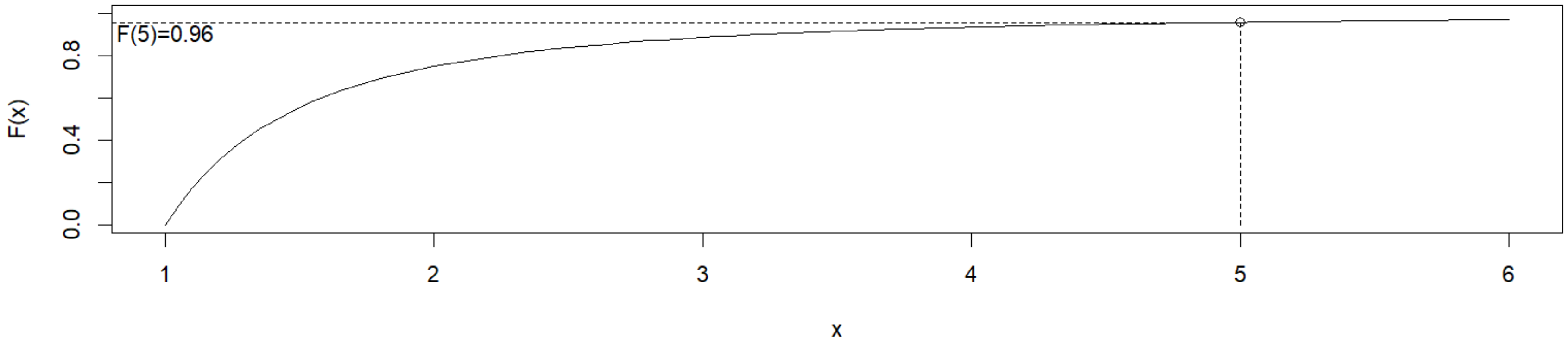




2. Distribución de una variable aleatoria continua Ejemplo 4.1 (Solución) b)

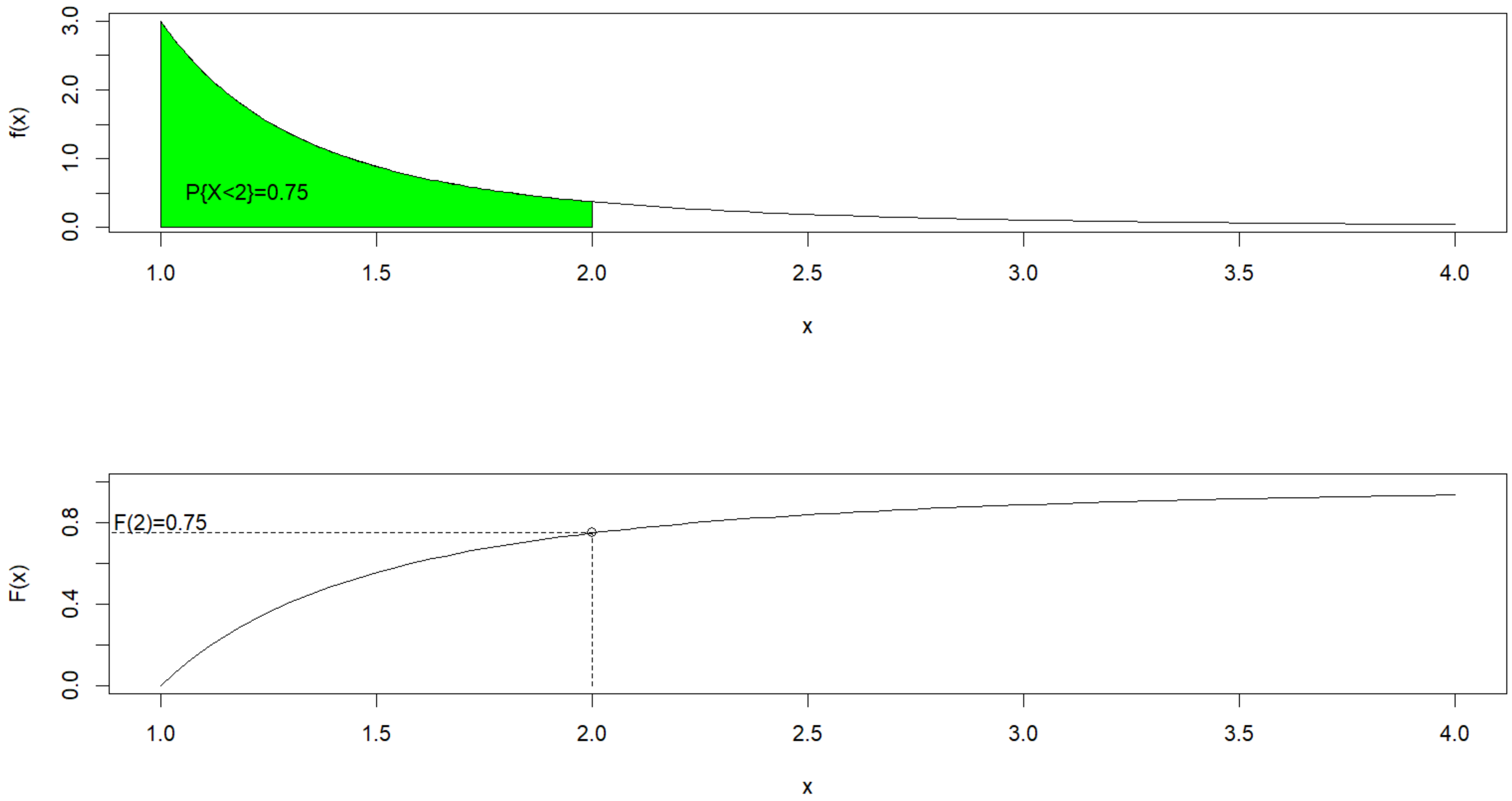
$b)\ P\{X > 5\} = 1 - F(5) = 1 - \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) = 1 - 0.96 = 0.04$





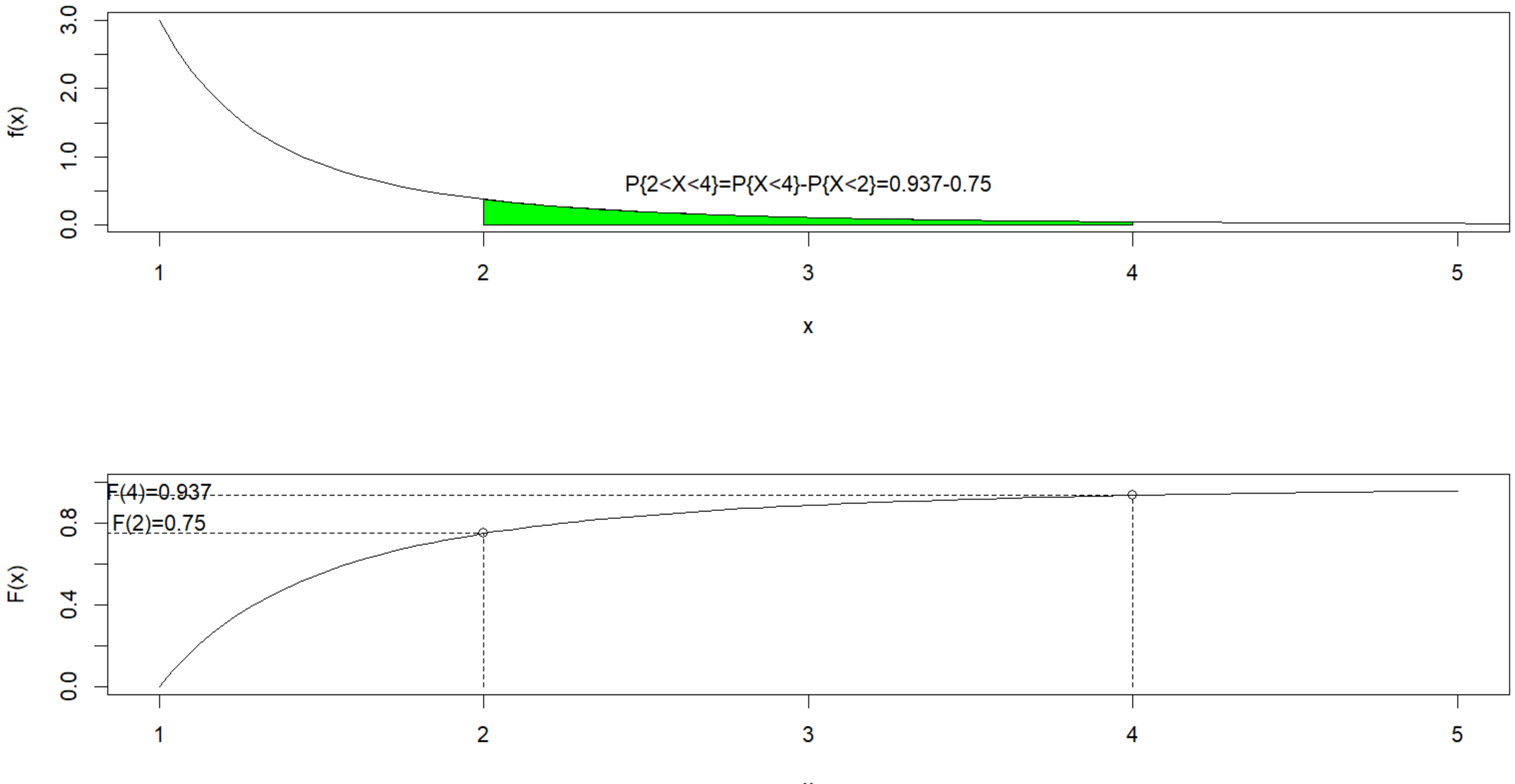
2. Distribución de una variable aleatoria continua Ejemplo 4.1 (Solución) c)

$c)\ \ P\{X < 2\} = F(2) = 1 - \frac{1}{2^2} = 0.75$



2. Distribución de una variable aleatoria continua Ejemplo 4.1 (Solución) (d)

d) $P\{2 < X < 4\} = F(4) - F(2) = \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = 0.937 - 0.75 = 0.187$



3. Características de una variable continua

- Experanza
  - $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$
- Varianza
  - $\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx$
- Desviación estándar
  - $\sigma = Std(X) = \sqrt{Var(X)}$

3. Características de una variable continua
Comparación con distribución discreta

Distribución	Discreta	Continua
Esperanza	$\mu = E(X) = \sum_{x} xP(x)$	$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$
Varianza	$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{x} (x-\mu)^2 P(x)$	$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$

3. Características de una variable continua Ejemplo 4.2

- Continuación del ejemplo 4.1
- Una variable aleatoria discreta X tiene función de densidad de probabilidad
  - $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$
- Calcular la Esperanza y la Varianza

3. Características de una variable continua Ejemplo 4.2 (Solución)

- Esperanza
  - $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{1}^{\infty}(x)(2x^{-3})dx = -2x^{-1} \Big|_{1}^{\infty} = 2$
- Varianza
  - $\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{1}^{\infty}(x-2)^2 f(x)dx = +\infty$

4. Distribución Uniforme

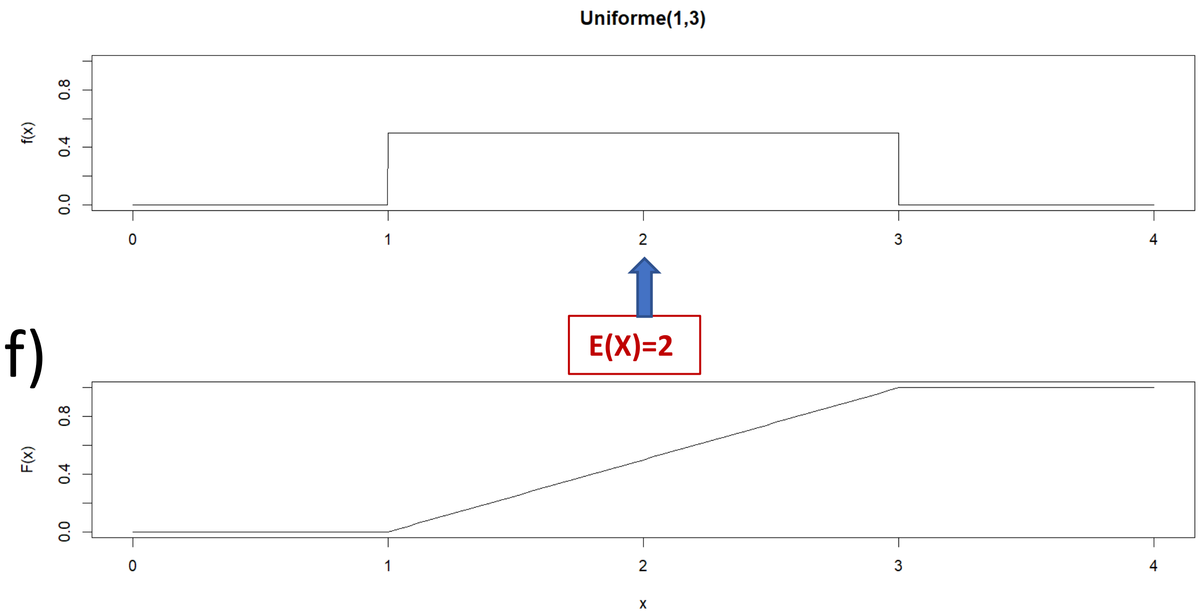
- La distribución Uniforme se utiliza cuando un valor se elige “al azar” de un intervalo de valoresdado; es decir, sin ninguna preferencia sobre valores bajos, altos o medios.
- Sus parámetros son:
  - límite inferior del intervalo
  - límite superior del intervalo
- La distribución Uniforme con intervalo (0,1) se llama Distribución Uniforme Estándar.

4. Distribución Uniforme Resumen

- X: Variable aleatoria con distribución Uniforme → *Uniform(a, b)*
  - *Número elegido "al azar" en el intervalo (a,b)*
- Parámetros
  - *a = límite inferior del intervalo < b*
  - *b = límite superior de intervalo > a*
- Rango de valores
  - $a < x < b$
- Función de densidad de probabilidad (pdf)
  - $f(x) = \frac{1}{b-a}$
- Función de distribución acumulada (cdf)
  - $F(x) = \frac{1}{b-a}x - \frac{1}{b-a}$
- Esperanza
  - $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- Varianza
  - $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

4. Distribución Uniforme Ejemplo

- X: Uniform(1,3)
  - $a = 1$
  - $b = 3$
- Función de densidad de probabilidad (pdf)
  - $f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2} = 0.5$
- Función de distribución acumulada (cdf)
  - $F(x) = \frac{1}{b-a}x - \frac{1}{b-a} = 0.5x - 0.5$
- Esperanza: $E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{4}{2} = 2$
- Varianza: $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4}{12} = 0.33$



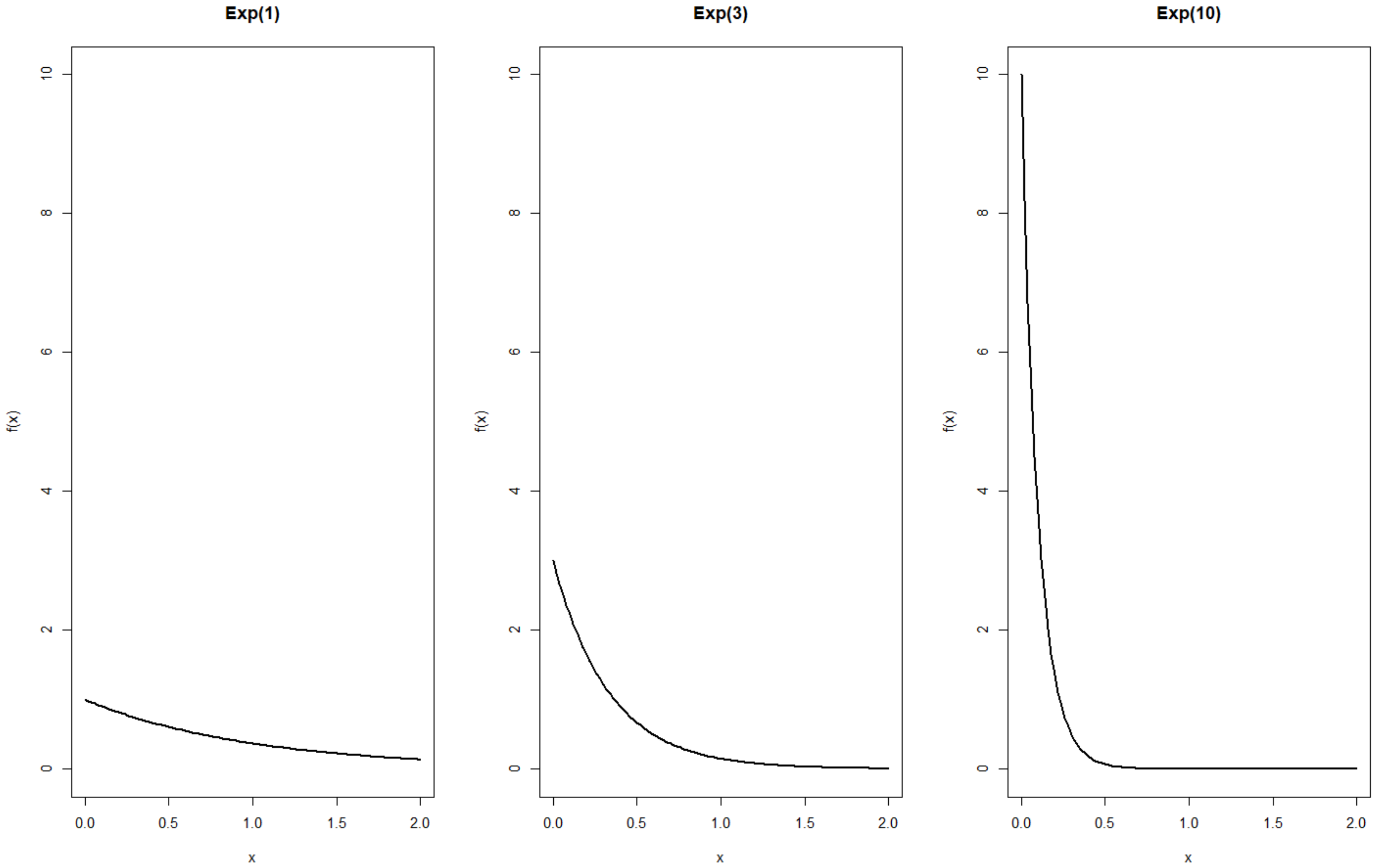
5. Distribución Exponecial

- La distribución Exponencial se utiliza para modelar medidas de tiempo
  - Por ejemplo, tiempo de espera, tiempo de llegada, vida útil del hardware, tiempo entre fallos, tiempo entre llamadas telefónicas, etc.
- En una secuencia de eventos "raros", cuando el número de eventos es una variable discreta de Poisson, el tiempo entre eventos es Exponencial.
- Su único parámetro es:
  - λ, la frecuencia de los eventos

5. Distribución Exponencial Resumen

- X: Variable aleatoria con distribución Exponencial → *Exponential(λ)*
  - *Tiempo entre dos eventos con distribución de Poisson(λ)*
- Parámetros
  - λ = frecuencia de ocurrencia de eventos > 0
- Rango de valores
  - $x > 0$
- Función de densidad de probabilidad (pdf)
  - $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $\quad(\text{donde } e = 2.7183)$
- Función de distribución acumulada (cdf)
  - $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- Esperanza
  - $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- Varianza
  - $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

5. Distribución Exponencial
Efectos de diferentes valores para λ

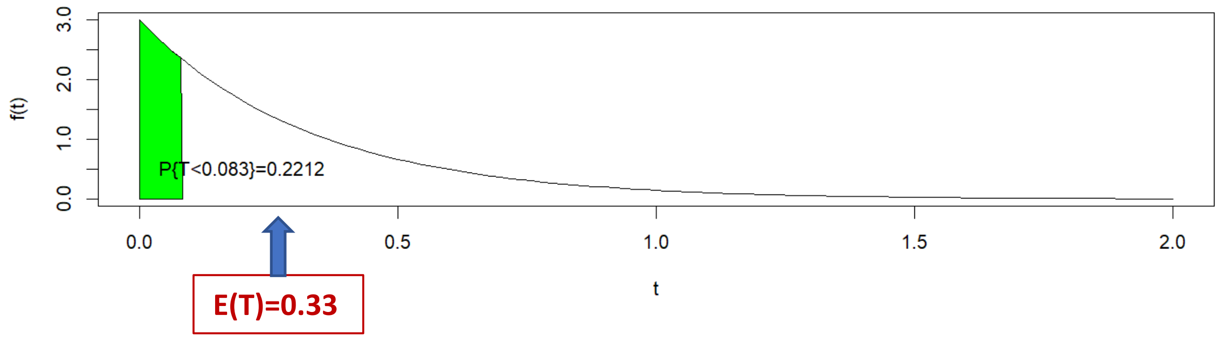


5. Distribución Exponencial Ejemplo 4.5 (Impresora)

- Los trabajos se envían a una impresora a una tasa promedio de 3 trabajos por hora.
  a) ¿Cuál es el tiempo esperado (en minutos) entre los trabajos?
  b) ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo trabajo se envíe dentro de 5 minutos?

5. Distribución Exponencial
Ejemplo 4.5 (Solución)

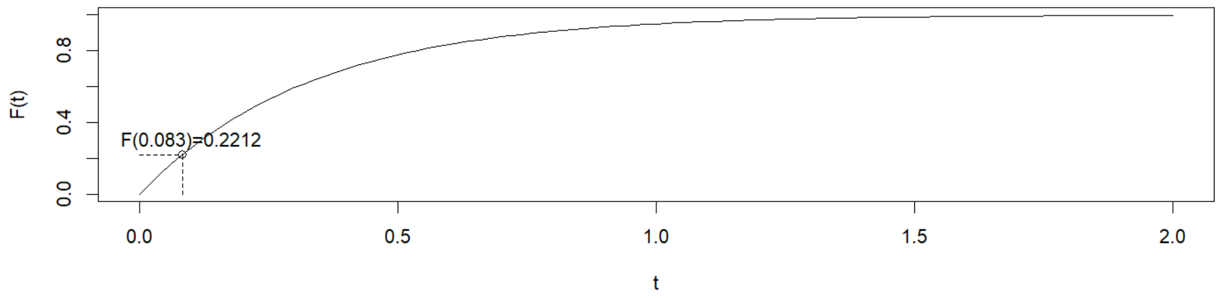
- λ = 3 trabajos por hora
- X: Número de trabajos en una hora → Poisson(3)
- T: Tiempo entre trabajos (en horas) → Exponential(3)
- $f(t) = 3e^{-3t}$
- $F(t) = 1 - e^{-3t}$



a) $E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3}$ horas $= 0.33$ horas entre trabajos (20 min)

b) $5 \text{ min} = \frac{1}{12}$ horas $= 0.083$ horas

$$P\left\{T < \frac{1}{12}\right\} = F_T\left(\frac{1}{12}\right) = 1 - e^{-\frac{3}{12}} = 1 - 2.7183^{-0.25} = 0.2212$$



5. Distribución Exponencial Propiedad “sin memoria”

- Se dice que “las variables exponenciales pierden memoria”.
- Supongamos que una variable exponencial T representa un tiempo de espera.
- La propiedad sin memoria significa que el hecho de haber esperado t minutos se “olvida” y no afecta el tiempo de espera futuro.
- Independientemente del evento T > t, cuando el tiempo de espera total excede de t, el tiempo de espera restante aún tiene distribución exponencial con el mismo parámetro.
  - $P\{T > t + x \mid T > t\} = P\{T > x\} \qquad \text{para } t, x > 0$
  - En esta fórmula, t es la parte ya transcurrida del tiempo de espera y x es el tiempo restante adicional.
- Esta propiedad es única para la distribución exponencial.
  - Ninguna otra variable continua $X \in (0,\infty)$ es “sin memoria”.
  - Entre las variables discretas, esta propiedad la tiene la distribución Geométrica.

6. Distribución Gamma

- En un proceso de eventos raros, con tiempos exponenciales entre dos eventos consecutivos, el tiempo entre dos secuencias de α eventos tiene distribución Gamma porque consiste en tiempos exponenciales independientes.
- Una variable aleatoria Gamma es la suma de las variables aleatorias α independientes Exponenciales(λ)
- Parámetros
  - α, el número de eventos
  - λ, la frecuencia de los eventos
- La distribución Gamma se puede utilizar para el tiempo total de un proceso de varios pasos, por ejemplo, relacionado con la descarga o instalación de una serie de archivos.
- Cuando un determinado proceso consiste en α pasos independientes y cada paso toma un tiempo Exponencial, entonces el tiempo total tiene distribución Gamma con parámetros α y λ.

6. Distribución Gamma Resumen

- X: Variable aleatoria con distribución Gamma → *Gamma(α, λ)*
  - *Tiempo entre dos secuencias de α eventos con distribución de Poisson(λ)*
- Parámetros
  - *α = número de eventos en una secuencia > 0*
  - *λ = frecuencia de ocurrencia de eventos > 0*
- Rango de valores
  - $x > 0$
- Función de densidad de probabilidad (pdf)
  - $f(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$ $\left(\text{donde } \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt\right)$ $\Gamma()$ se denomina función Gamma
- Función de distribución acumulada (cdf)
  - $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt$
- Esperanza
  - $E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$
- Varianza
  - $Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$
- Relación con otras distribuciones
  - Gamma(α, λ) es una suma de α variables Exponential(λ) independientes
  - Gamma(1,λ) = Exponential(λ)

6. Distribución Gamma
Efecto de diferentes valores para α

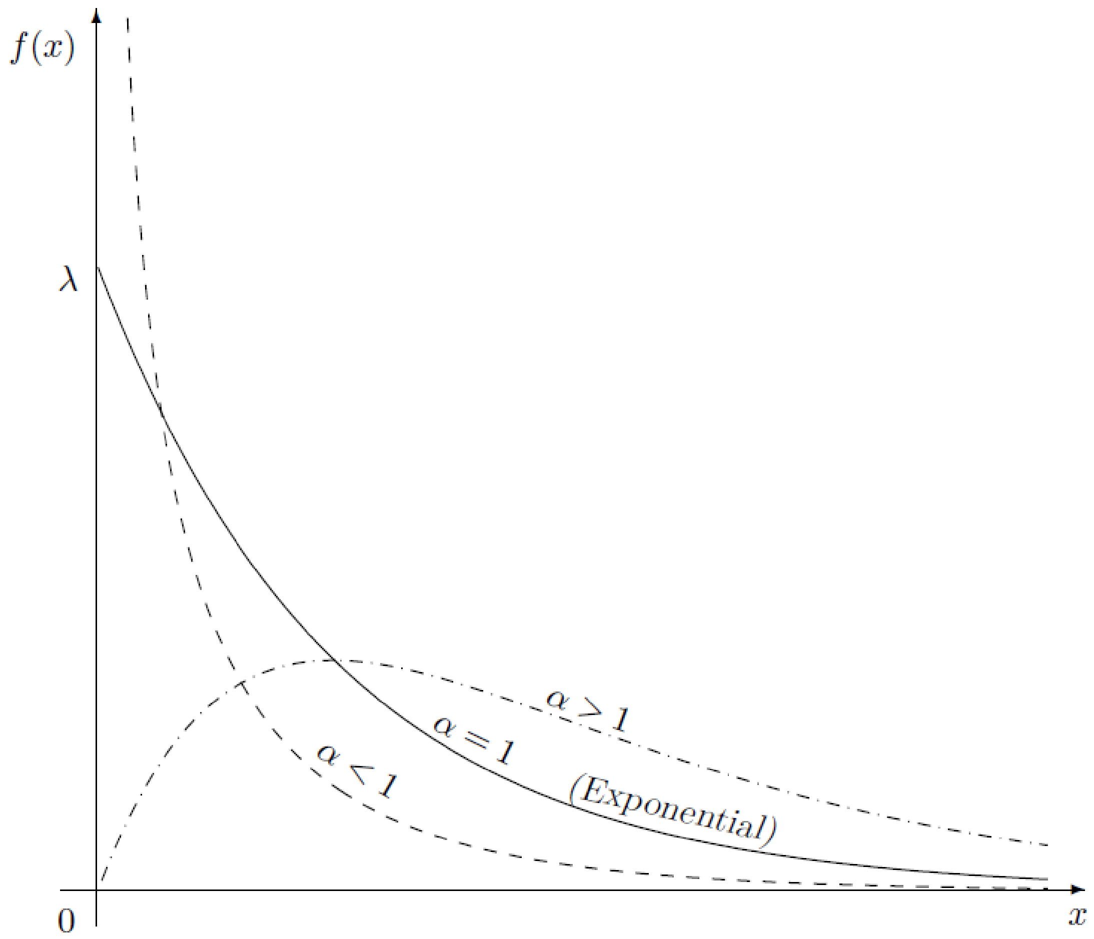


FIGURE 4.5: *Gamma densities with different shape parameters α.*

6. Distribución Gamma
Fórmula Gamma-Poisson

- El cálculo de las probabilidades de Gamma se puede simplificar significativamente haciendo una transformación de la variable Gamma en una variable de Poisson
  - T: Gamma(α, λ)
  - X: Poisson(λt)
    - $P\{T > t\} = P\{X < \alpha\}$
    - $P\{T \leq t\} = P\{T < t\} = P\{X \geq \alpha\}$

6. Distribución Gamma
Ejemplo 4.6 (Anuncios en Internet)

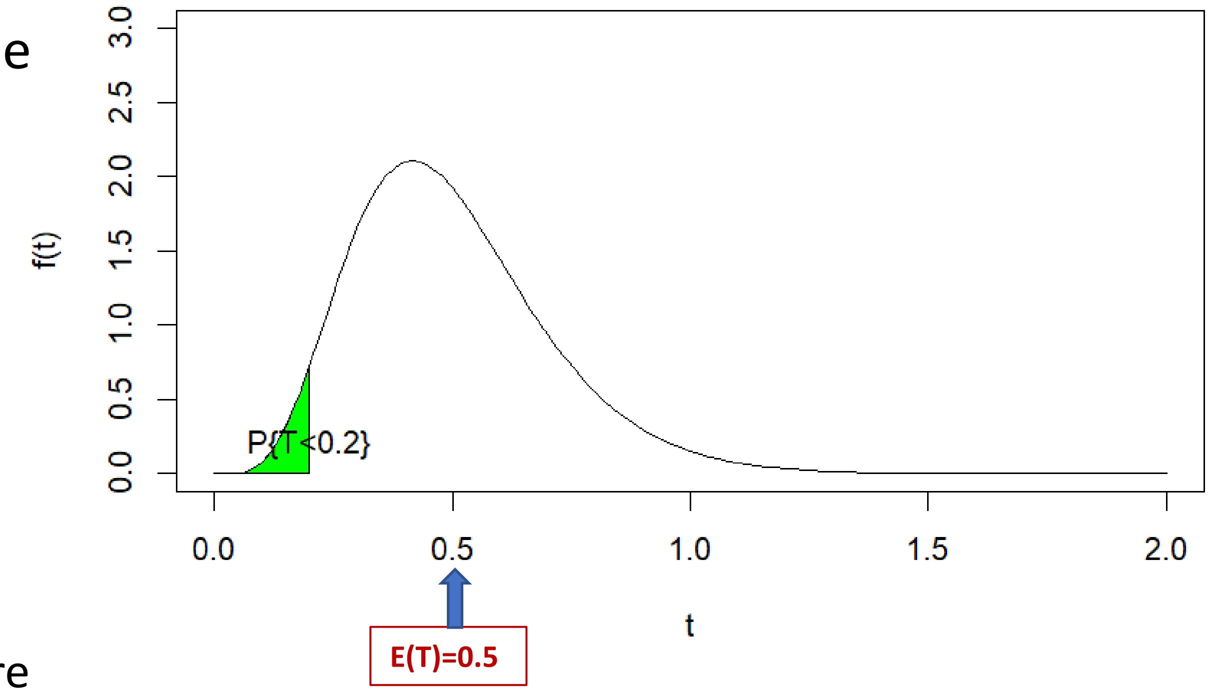
- Los usuarios visitan un determinado sitio de Internet a una tasa promedio de 12 visitas por minuto.
- Cada sexto visitante recibe un anuncio en forma de un banner parpadeante.
  - a) Calcular la esperanza del tiempo entre anuncios consecutivos.
  - b) Calcular la probabilidad de que el tiempo entre anuncios consecutivos sea inferior a 0,2 minutos (12 segundos).

6. Distribución Gamma Ejemplo 4.6 (Solución)

- T: Tiempo entre anuncios consecutivos → Gamma(α, λ)
  - α = 6, porque cada 6th evento (visitante) se recibe un anuncio
  - λ = 12 accesos por minuto

a) $E(T) = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{6}{12} = 0.5\ \text{min}{=}30\ \text{sec}$

b) t=0.2. Si definimos una variable X: Poisson(12·0.2=2.4), aplicando la fórmula Gamma-Poisson:
  - $P\{T < 0.2\} = P\{X \geq 6\} = 1 - P\{X \leq 5\} = 1 - 0.964 = \mathbf{0.036}$
    - P{X≤5} puede obtenerse usando un software como R, o la Tabla A3 del libro, buscando λ=2.4, x=5



6. Distribución Gamma
Ejemplos 4.7 y 4.8 (Tiempo de compilación)

- La compilación de un programa informático consta de 3 bloques que se procesan secuencialmente, uno tras otro.
- La compilación de cada bloque tiene un tiempo exponencial con una media de 5 minutos, independientemente de los otros bloques.
  a) Calcular la esperanza y varianza del tiempo total de compilación.
  b) Calcular la probabilidad de compilar todo el programa en menos de 12 minutos.

6. Distribución Gamma Ejemplos 4.7 y 4.8 (Solución)

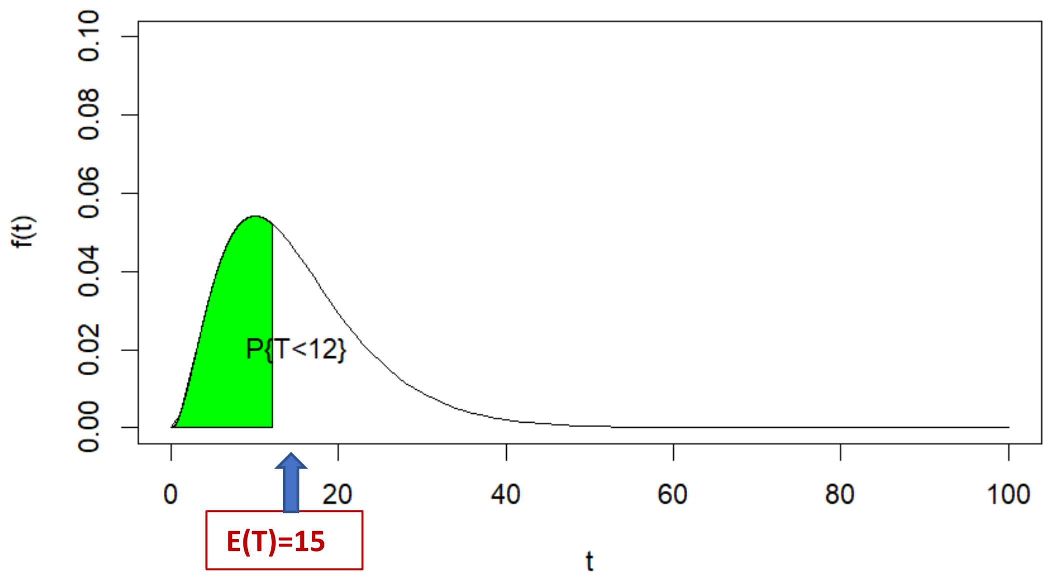
- T: Tiempo total de compilación → Gamma(α=3, λ=1/5)
  - T es la suma de 3 tiempos exponenciales independientes; por lo que tiene una distribución Gamma con α = 3.
  - La frecuencia λ es (1/5) min^{-1} porque el tiempo exponencial de compilación de cada bloque tiene esperanza 1/λ = 5 min

a) $E(T) = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{3}{1/5} = 15 \text{ min}$

$Var(T) = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{3}{(1/5)^2} = 75 \text{ min}^2$

b) t=12. Si definimos una variable X: Poisson(1/5·12=2.4), aplicando la fórmula Gamma-Poisson:

- $P\{T < 12\} = P\{X \geq 3\} = 1 - P\{X \leq 2\} = 1 - 0.570 = \mathbf{0.43}$
  - P{X≤2} puede obtenerse usando un software como R, o la Tabla A3 del libro, buscando λ=2.4, x=2

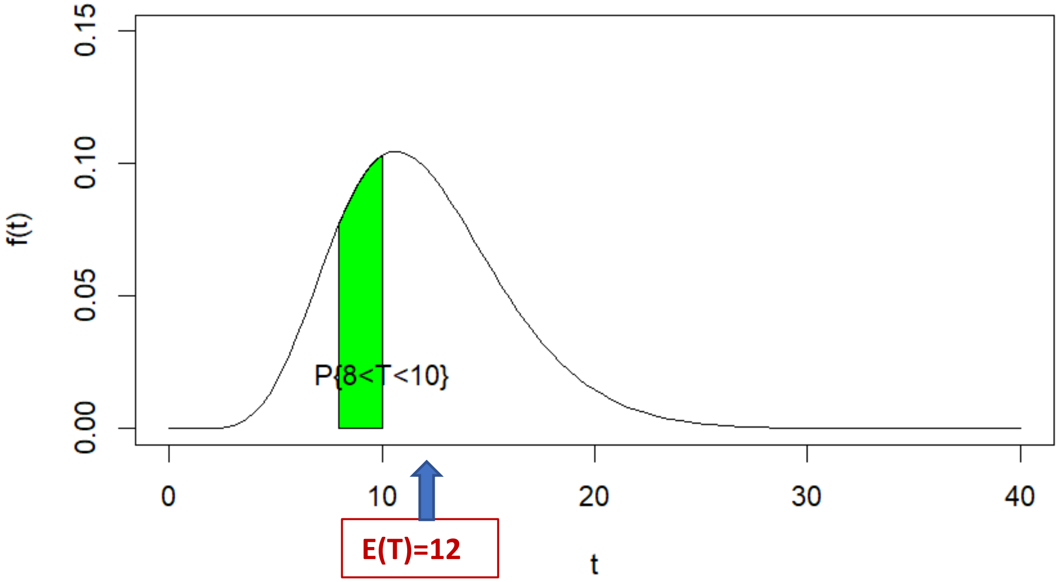


6. Distribución Gamma
Ejemplo 4.9 (Chips de memoria)

- La vida útil de unos chips de memoria para ordenadores tiene distribución Gamma con esperanza $\mu = 12$ años y desviación estándar $= 4$ años.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un chip tenga una vida útil de entre 8 y 10 años?

6. Distribución Gamma
Ejemplo 4.9 (Solución)

- T: Vida útil de un chip → Gamma(α, λ)
  - $E(T) = \mu = \frac{\alpha}{\lambda} = 12$
  - $Var(T) = \sigma^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2} = 16$
  - $\alpha = \frac{\mu^2}{\sigma^2} = \frac{12^2}{16} = 9$
  - $\lambda = \frac{\mu}{\sigma^2} = \frac{12}{16} = 0.75$



- t_1=8; t_2=10.
  - X_1: Poisson(0.75·8=6)
  - X_2: Poisson(0.75·10=7.5)
  - $P\{8 < T < 10\} = P\{T < 10\} - P\{T < 8\} = P\{X_2 \geq 9\} - P\{X_1 \geq 9\} = 1 - P\{X_2 \leq 8\} - 1 + P\{X_1 \leq 8\} = 1 - 0.662 - 1 + 0.847 = \mathbf{0.185}$
    - P{X_1≤8} and P{X_2≤8} pueden obtenerse usando un software como R, o la Tabla A3 del libro, buscando λ_1=6, λ_2=7.5, x=8

6. Distribución Gamma Ejercicios propuestos

- Ejercicios 4.7, 4.12, 4.13 y 4.14 del libro
  - Las respuestas de 4.7, 4.14 están disponibles en el libro

7. Distribución Normal

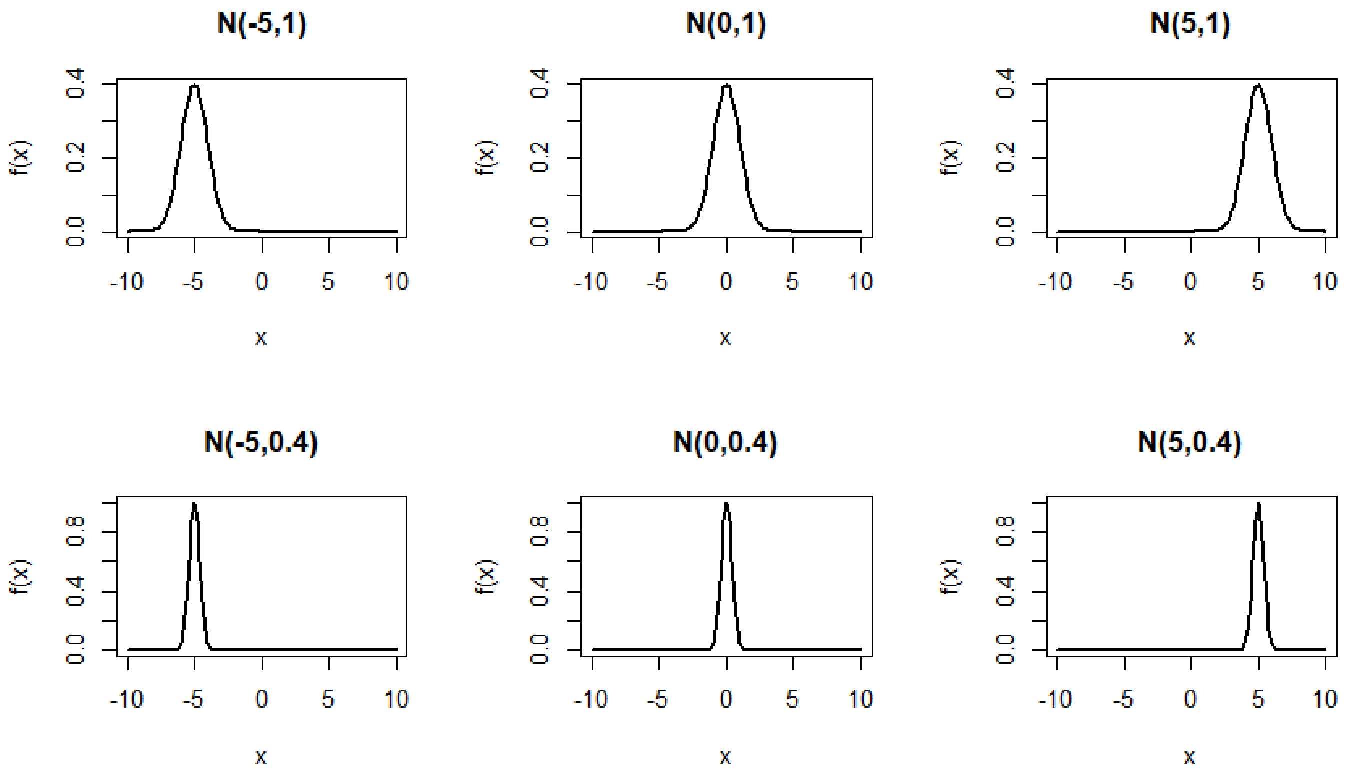
- Abraham de Moivre, un estadístico y consultor del siglo XVIII para los jugadores, señaló que cuando el número de eventos (cambios de monedas) aumentó, la forma de la distribución binomial se acercó a una curva muy suave, y razonó que si pudiera encontrar una expresión matemática para esta curva, sería capaz de resolver problemas como encontrar la probabilidad de 60 o más cabezas de 100 giros de monedas mucho más fácilmente. Esto es exactamente lo que hizo, y la curva que descubrió ahora se llama la «curva normal». (*D. Lane, History of the Normal Distribution*)
- La distribución normal es un buen modelo para variables físicas como el peso, la altura, la temperatura, el voltaje, el nivel de contaminación, y también para otras variables como los ingresos de los hogares o las calificaciones de los estudiantes. A menudo se utiliza en las ciencias naturales y sociales para representar variables aleatorias cuyas distribuciones no se conocen.
- La distribución normal juega un papel vital en la Probabilidad y la Estadística, principalmente debido al Teorema Central del Límite, según el cual las sumas y los promedios de valores a menudo tienen una distribución aproximadamente normal.
  - Debido a este hecho, varias fluctuaciones y errores de medición que consisten en el número acumulado de pequeños términos aparecen normalmente distribuidos.

7. Distribución Normal Resumen

- X: Variable aleatoria con distribución Normal → *N(μ, σ)*
- Parámetros
  - *μ = esperanza ∈ (-∞, + ∞)*
  - *σ = desviación estándar ∈ (0, + ∞)*
- Rango de valores
  - $-\infty < x < \infty$
- Función de densidad de probabilidad (pdf)
  - $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- Función de distribución acumulada (cdf)
  - $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ dt$
- Esperanza
  - $E(X) = \mu$
- Varianza
  - $Var(X) = \sigma^2$
- Relación con otras distribuciones
  - La suma de variables aleatorias independientes con distribución Binomial(n, p), NB(k, p), o Gamma(α, λ), se aproxima a una distribución Normal cuando n, k, α → ∞

7. Distribución Normal
Efectos de diferentes valores para μ y σ

- La función de densidad de probabilidad tiene forma de campana, simétrica y centrada en μ.
- El cambio de μ desplaza la curva hacia la izquierda o hacia la derecha sin afectar a su forma, mientras que el cambio de σ la hace más concentrada o más aplanada.
- μ se considera un parámetro de ubicación, y σ un parámetro de escala.



7. Distribución Normal Distribución Normal estándar

- Una distribución Normal con “parámetros estándar” μ = 0 y σ = 1 se denomina distribución Normal estándar
- Una variable aleatoria Normal estándar N(0,1), generalmente denotada por Z, se puede obtener de una variable aleatoria X N(μ, σ) estandarizando, es decir, restando la esperanza y dividiendo por la desviación estándar
  - $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$
- Función de densidad de probabilidad (pdf)
  - $f(z) = \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$
- Función de distribución acumulada (cdf)
  - $F(z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$
- Cualquier variable aleatoria Normal se puede obtener de una variable Normal estándar Z; por lo tanto, sólo se necesita una tabla de distribución Normal estándar (Tabla A4 del libro).

7. Distribución Normal
Ejemplo 4.11 (Ingresos de los hogares)

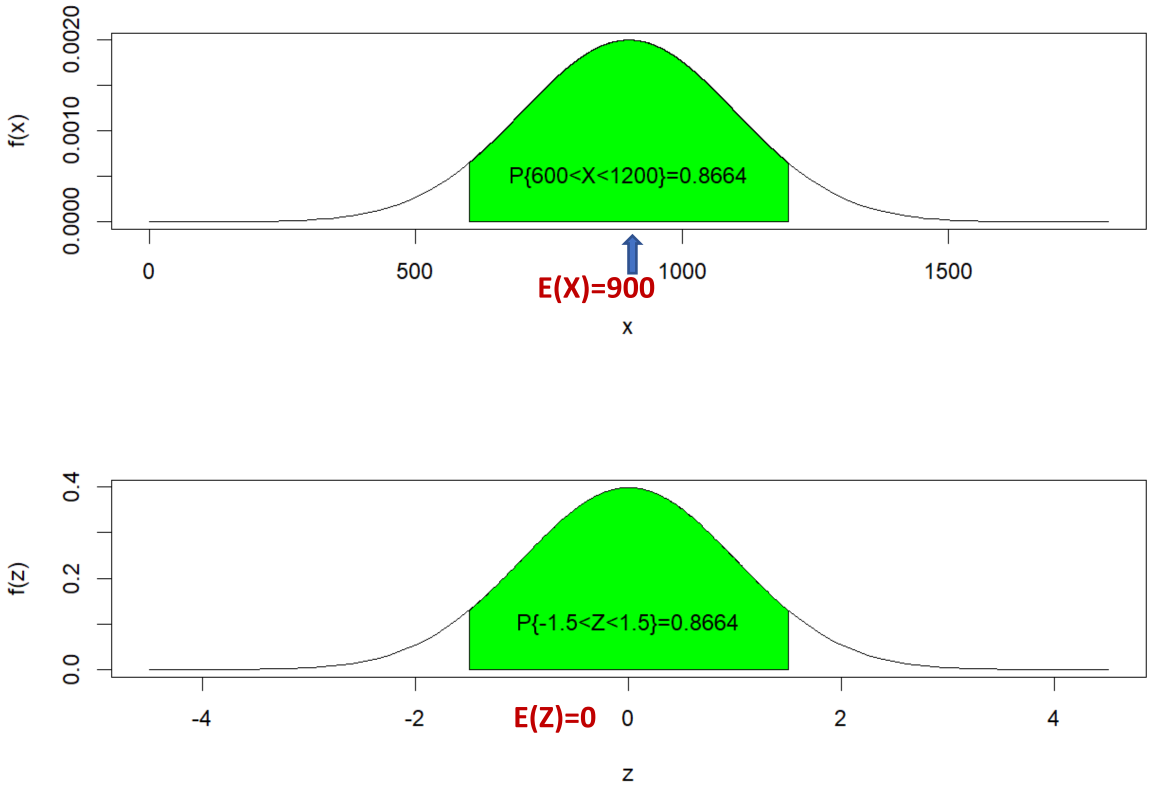
- Suponer que el ingreso familiar promedio en algún país es de 900 monedas, y la desviación estándar es de 200 monedas.
- Asumiendo la distribución Normal de los ingresos, calcular la proporción de hogares cuyos ingresos están entre 600 y 1200 monedas.

7. Distribución Normal
Ejemplo 4.11 (Solución)

- X: Ingresos de los hogares → N(900, 200)
- Transformando en una variable Normal estándar Z → N(0,1)
  - $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-900}{200}$
- $P\{600 < X < 1200\}$

$$= P\left\{\frac{600-900}{200} < Z < \frac{1200-900}{200}\right\}$$
$$= P\{-1.5 < Z < 1.5\}$$
$$= P\{Z < 1.5\} - P\{Z < -1.5\}$$
$$= \Phi(1.5) - \Phi(-1.5)$$
$$= 0.9332 - 0.0668 = 0.8664$$
$$\rightarrow \mathbf{86.64}\%$$

  - Usando un software como R, o la Tabla A4 (fila 1.5 con columna 0.0, y fila -1.5 con columna -0.0)



7. Distribución Normal
Ejemplo 4.12 (Cupones de alimentos)

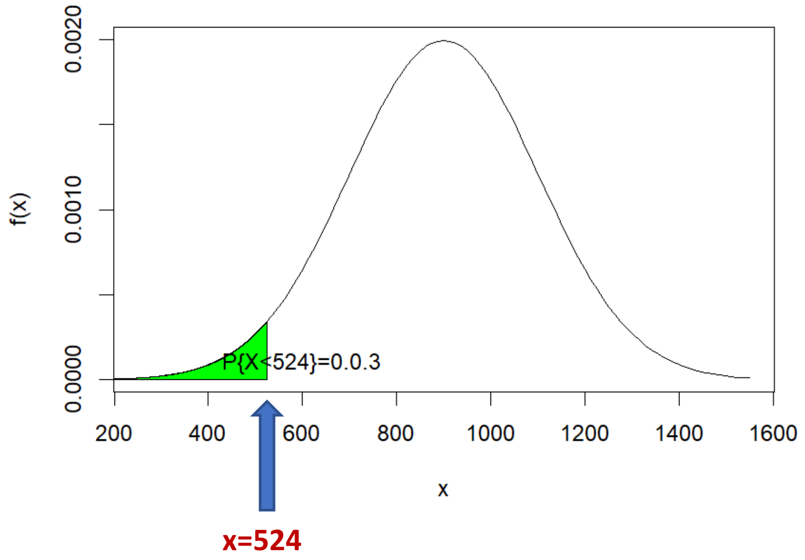
- El gobierno del país en el Ejemplo 4.11 decide emitir cupones de alimentos para el 3 % de los hogares más pobres.
- ¿Qué ingresos recibirán las familias con cupones de alimentos?.

7. Distribución Normal
Ejemplo 4.12 (Solución)

- Necesitamos encontrar el valor de ingreso x tal que P {X < x} = 3% = 0.03
- Transformando en una variable Normal estándar Z → N(0,1)
  - $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-900}{200}$
- $P\{X < x\} = 0.03$

$$= P\left\{Z < \frac{x-900}{200}\right\} = \Phi\left(\frac{x-900}{200}\right) = 0.03$$

- En la Tabla A4, hay que buscar la probabillidad 0.033
  - Se comprueba que $\Phi(-1.88) \approx 0.033$
  - Por tanto $\frac{x-900}{200} = -1.88 \rightarrow x = (-1.88)(200) + 900$ $= \mathbf{524\ monedas}$



7. Distribución Normal
Ejercicios propuestos

- Ejercicios 4.16, 4.17, 4.21, 4.22 del libro
  - Las respuestas de 4.16 y 4.22 están disponibles en el libro

8. Teorema Central del Límite Versión básica

- También se conoce como Teorema del Límite Central (*Central Limit Theorem*)
- Considerando n variables aleatorias independientes
  - $X_1, X_2, .., X_n$
  - Con la misma esperanza μ y desviación estándar σ
- Considerando la variable obtenida como la suma de las n variables
  - $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + .. + X_n$
  - Con esperanza $n\mu$, varianza $n\sigma^2$ y desviación estándar $\sigma\sqrt{n}$
- Según $n \to \infty$ *(suele considerarse n > 30)*
  - La variable normalizada $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$
  - Converge hacia una variable Normal estándar Z: N(0,1)
- Por lo que, para todo valor z se cumple:
  - $P\left\{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq z\right\} \to \Phi(z)$
- Este teorema es muy importante porque puede ser aplicado a cualquier variable aleatoria.

8. Teorema Central del Límite Ejemplo 4.13 (Espacio en disco)

- Un disco tiene un espacio libre de 330 megabytes.
- ¿Es probable que sea suficiente para 300 imágenes independientes, si se espera que cada imagen tenga un tamaño de 1 megabyte con una desviación estándar de 0,5 megabytes?

8. Teorema Central del Límite Ejemplo 4.13 (Solución)

- X_i = Tamaño de la imagen i, con μ = 1, σ = 0.5
- Hay n=300 imágenes
- El número de imágenes n es grande (n>30) por lo que se puede aplicar el Teorema Central del Límite a la suma de tamaños S_n
- $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n - (300)(1)}{0.5\sqrt{300}}$
- $P\{\text{espacio suficiente}\} = P\{S_n \le 300\} = P\left\{Z_n \le \frac{300-(300)(1)}{0.5\sqrt{300}}\right\} = P\{Z_n \le 3.46\} \approx \Phi(3.46) = \mathbf{0.9997}$
  - *Usando software como R, o la Tabla A4 (fila 3.4 con columna 0.06)*

8. Teorema Central del Límite
Aplicación a distribuciones discretas y continuas

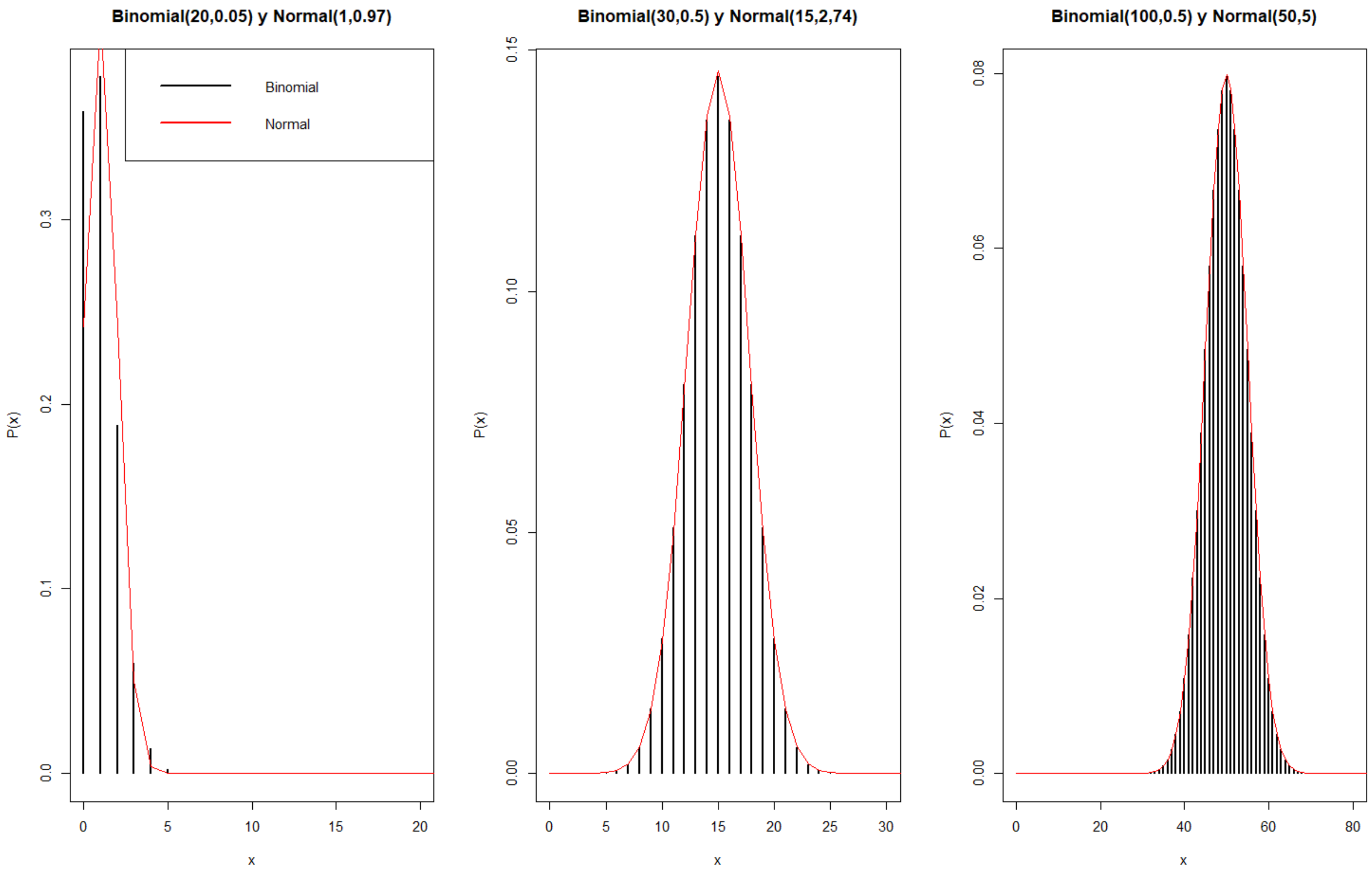
- Al menos tres tipos de variables aleatorias son un suma de variables independientes:
  - Variable Binomial = suma de variables de Bernoulli independientes
  - Variable Binomial Negativa = suma de variables Geométricas independientes
  - Variable Gamma = suma de variables Exponenciales independientes
- Por lo tanto, el Teorema Central del Límite se aplica a todas estas distribuciones con n suficientemente grandes en el caso de Binomial(n,p), k para Binomial Negativa (k,p), y α para variables Gamma(α,λ).

8. Teorema Central del Límite
Aproximación Normal de la distribución Binomial

- Abraham de Moivre propuso la primera versión del Teorema Central del Límite como una aproximación de la distribución Binomial.
- Una variable Binomial(n, p) es un caso especial de $S_n = X_1 + X_2 + .. + X_n$, cuando todas las variables X_i tienen una distribución de Bernoulli con parámetro p.
- Cuando n es grande, se puede aproximar la distribución Binomial a una Normal
  - $Binomial(n, p) \approx Normal\left(\mu\ = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)}\right)$

- *NOTA: No hay unanimidad respecto a lo que se entiende por "grande" ni por la condición que debe cumplir p. En el libro de M. Baron se considera aplicable para valores n>30 y 0.05 ≤ p ≤ 0.95. Pero otros autores establecen que la aproximación es buena cuando n≥30, np≥5; y otros autores establecen n>50 y p con un valor cercano a 0.5.*

8. Teorema Central del Límite
Aproximación Normal-Binomial (ejemplos)



8. Teorema Central del Límite Corrección de continuidad

- Se necesita una corrección cuando se aproxima una distribución discreta (Binomial en este caso) por una distribución continua (Normal).
- Hay que recordar que la probabilidad P {X = x} puede ser positiva si X es discreta, mientras que siempre es 0 para X continua.
- Por lo tanto, un uso directo de la aproximación Normal siempre aproximará esta probabilidad por 0, que es una mala aproximación.
- Esto se resuelve introduciendo una corrección de continuidad:
  - Para una variable Binomial X, hay que expandir el intervalo en 0.5 unidades en cada dirección antes de calcular la aproximación Normal:
    - $P\{X = x\} = P\{x - 0.5 < X < x + 0.5\}$
    - $P\{X < x\} = P\{X < x - 0.5\}$
    - $P\{X \le x\} = P\{X < x + 0.5\}$
    - $P\{a \le X \le b\} = P\{X \le b\} - P\{X < a\} = P\{X < b + 0.5\} - P\{X < a - 0.5\}$

8. Teorema Central del Límite
Ejemplo 4.15 (Ataques de virus)

- Un nuevo virus informático ataca una carpeta que tiene 200 archivos.
- Cada archivo se daña con probabilidad 0.2 independientemente de otros archivos.
- ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 50 archivos se dañen?

8. Teorema Central del Límite Ejemplo 4.15 (Solución)

- X: Número de archivos dañados → Binomial(n = 200, p = 0.2)
- μ = np = 40, y $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 5.657$.
- Aplicando directamente la fórmula de la Binomial
  - $P\{X < 50\} = P\{X \leq 49\} = F(49) = \mathbf{0.9506}$
    - *Usando un software como R, porque la Tabla A2 sólo llega hasta n=25*
- Aplicando el Teorema Central del Límite con la corrección de continuidad
  - $P\{X < 50\} = P\{X < 49.5\} = P\left\{\frac{X-40}{5.657} < \frac{49.5-40}{5.657}\right\} = \Phi(1.68) = \mathbf{0.9535}$
    - *Usando un software como R, o la Tabla A4 (fila 1.6 con columna 0.08)*

8. Teorema Central del Límite
Ejemplo 4.15 (Corrección de continuidad)

- Tener en cuenta que la corrección de continuidad correctamente aplicada reemplaza 50 por 49.5, no por 50.5.
- Estamos interesados en el caso de que X sea estrictamente inferior a 50.
- Esto incluye todos los valores hasta 49 y corresponde al intervalo [0, 49] que expandimos a [0, 49.5].
- A ser X una variable discreta, los sucesos {X <50} y {X < 49.5} son los mismos; incluyen los mismos valores posibles de X.
- Los sucesos {X <50} y {X <50.5} son diferentes porque el primero incluye X = 50, y el segundo no.
- Reemplazar {X < 50} con {X <50.5} habría cambiado su probabilidad y habría dado una respuesta incorrecta.

8. Teorema Central del Límite
Ejercicios propuestos

- Ejercicios 4.23 a 4.28 del libro
  - Las respuestas de 4.24 y 4.28 están disponibles en el libro

9. Distribución T de Student

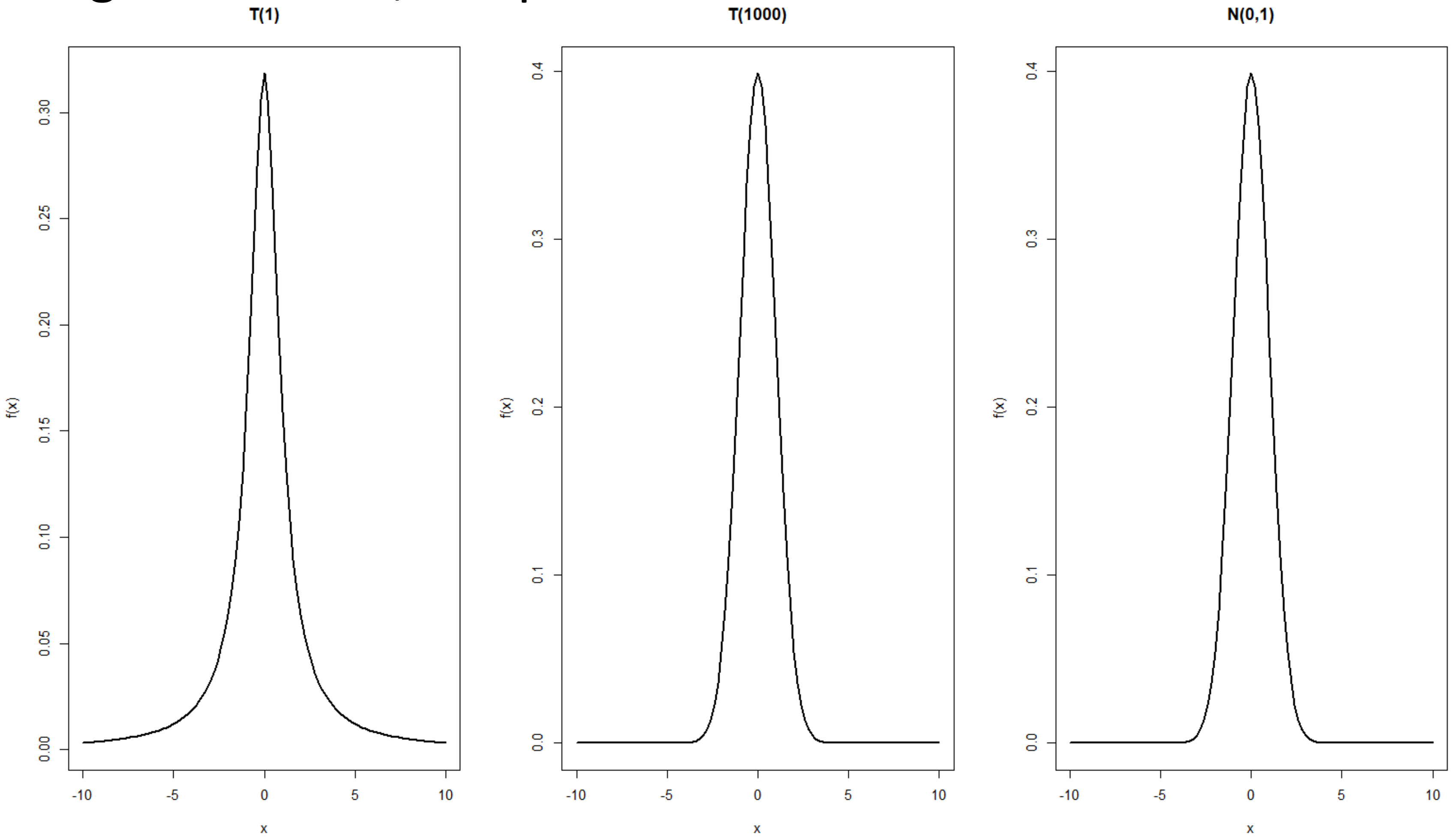
- La distribución T, también conocida como T de Student, es un tipo de distribución de probabilidad que es similar a la distribución Normal con su forma de campana pero tiene colas más pesadas.
  - La distribución T de Student tiene una mayor probabilidad de valores extremos que la distribución Normal, y como resultado tiene colas más pesadas.
    - Las colas son los extremos izquierdo y derecho de la gráfica de la función de densidad de probabilidad.
  - La pesadez de las colas está determinada por un parámetro de la distribución T de Student llamado “grados de libertad”:
    - valores más pequeños dan lugar a colas por encima de la distribución Normal estándar N(0,1)
    - valores más altos hacen que la distribución se aproxime a una distribución normal estándar N(0,1)
- La distribución T de Student es ampliamente utilizada en inferencia estadística, especialmente en pruebas de hipótesis y en la construcción de intervalos de confianza.
- La distribución T de Student fue propuesta por William Gosset

9. Distribución T de Student
Resumen

- X: Variable aleatoria con distribución T de Student → $T(\nu)$
- Parámetros
  - *ν = número de grados de libertad ∈ (0, + ∞)*
- Rango de valores
  - $-\infty < x < \infty$
- Función de densidad de probabilidad (pdf)
  - $f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$ donde $\Gamma()$ es la función Gamma
- Función de distribución acumulada (cdf)
  - $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dt$ (Tabla A5 del libro)
- Esperanza
  - $E(X) = 0$
- Varianza
  - $Var(X) = \frac{\nu}{\nu-2}$
- Relación con otras distribuciones
  - Se aproxima a la distribución Normal estándar N(0,1) cuando $\nu \to \infty$

9. Distribución T de Student
Efectos de diferentes valores para *v*

- Para valores grandes de v, es aproximadamente una Normal estándar



10. Distribución Chi-cuadrado

- La suma de los cuadrados de variables aleatorias normales independientes e idénticamente distribuidas es una variable con distribución Chi-cuadrado (χ^2)
- La distribución Chi-cuadrado fue propuesta Karl Pearson
- La distribución Chi-cuadrado es un caso especial de la distribución Gamma y es muy utilizadas en inferencia estadística, especialmente en la prueba de hipótesis y en la construcción de intervalos de confianza

10. Distribución Chi-cuadrado Resumen

- X: Variable aleatoria con distribución Chi-cuadrado → $\chi^2\ (\nu)$
- Parámetros
  - *ν = número de grados de libertad ∈ (0, + ∞)*
- Rango de valores
  - $x > 0$
- Función de densidad de probabilidad (pdf)
  - $f(x) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}}$ $\left(\text{donde } \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-t} dt\right)$ $\Gamma()$ es la <u>función Gamma</u>
- Función de distribución acumulada (cdf)
  - $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} t^{\frac{\nu}{2}-1} e^{\frac{-t}{2}} dt$ (Tabla A6 del libro)
- Esperanza
  - $E(X) = \nu$
- Varianza
  - $Var(X) = 2\nu$
- Relación con otras distribuciones
  - $\chi^2\ (\nu)$ es la suma de ν variables Normales independientes e idénticamente distribuidas
  - Es un caso especial de Gamma(α, λ) cuando $\alpha = \frac{\nu}{2}$ y $\lambda = 1/2$

10. Distribución Chi-cuadrado
Efecto de diferentes valores para *v*

- La distribución de Chi-cuadrado tiene asimetría positiva o hacia la derecha (*right-skewed*)
- Para grandes grados de libertad v, es aproximadamente normal

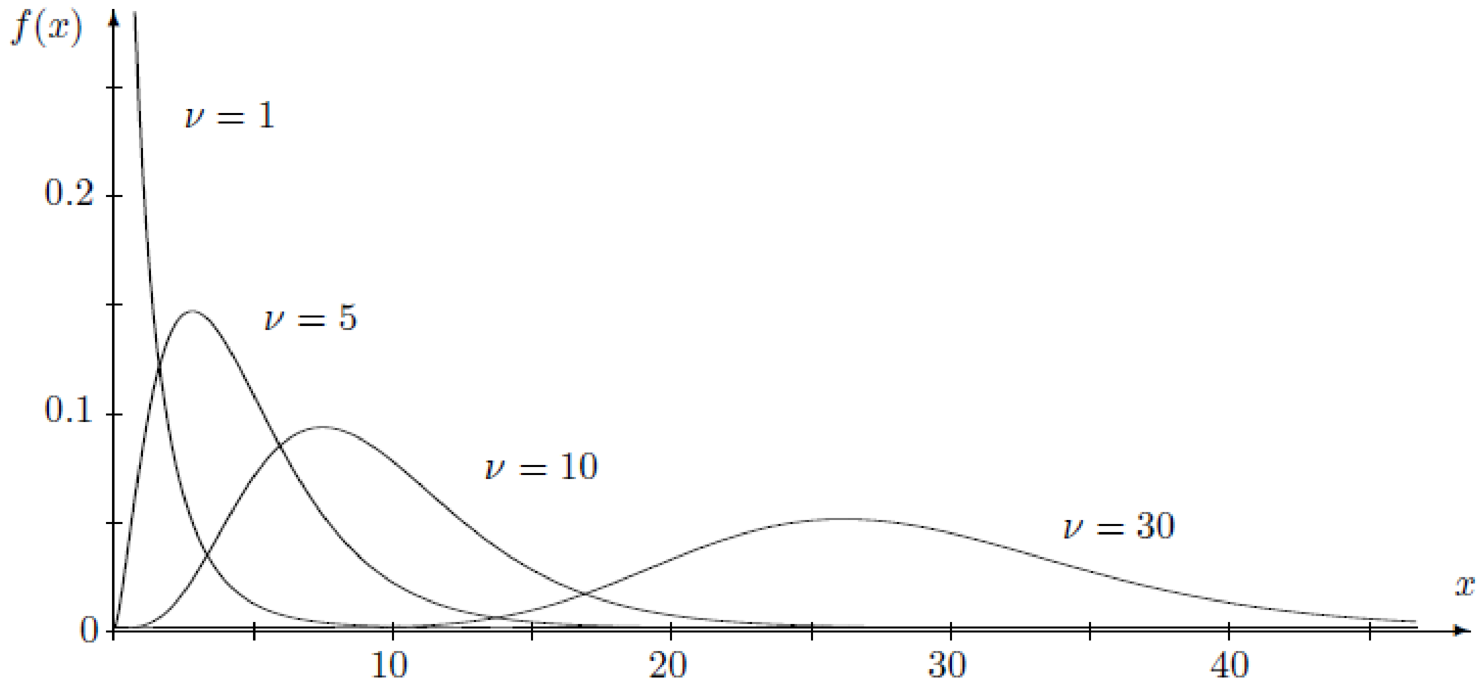


FIGURE 9.12: *Chi-square densities with ν = 1, 5, 10, and 30 degrees of freedom. Each distribution is right-skewed. For large ν, it is approximately Normal.*

11. Distribución F

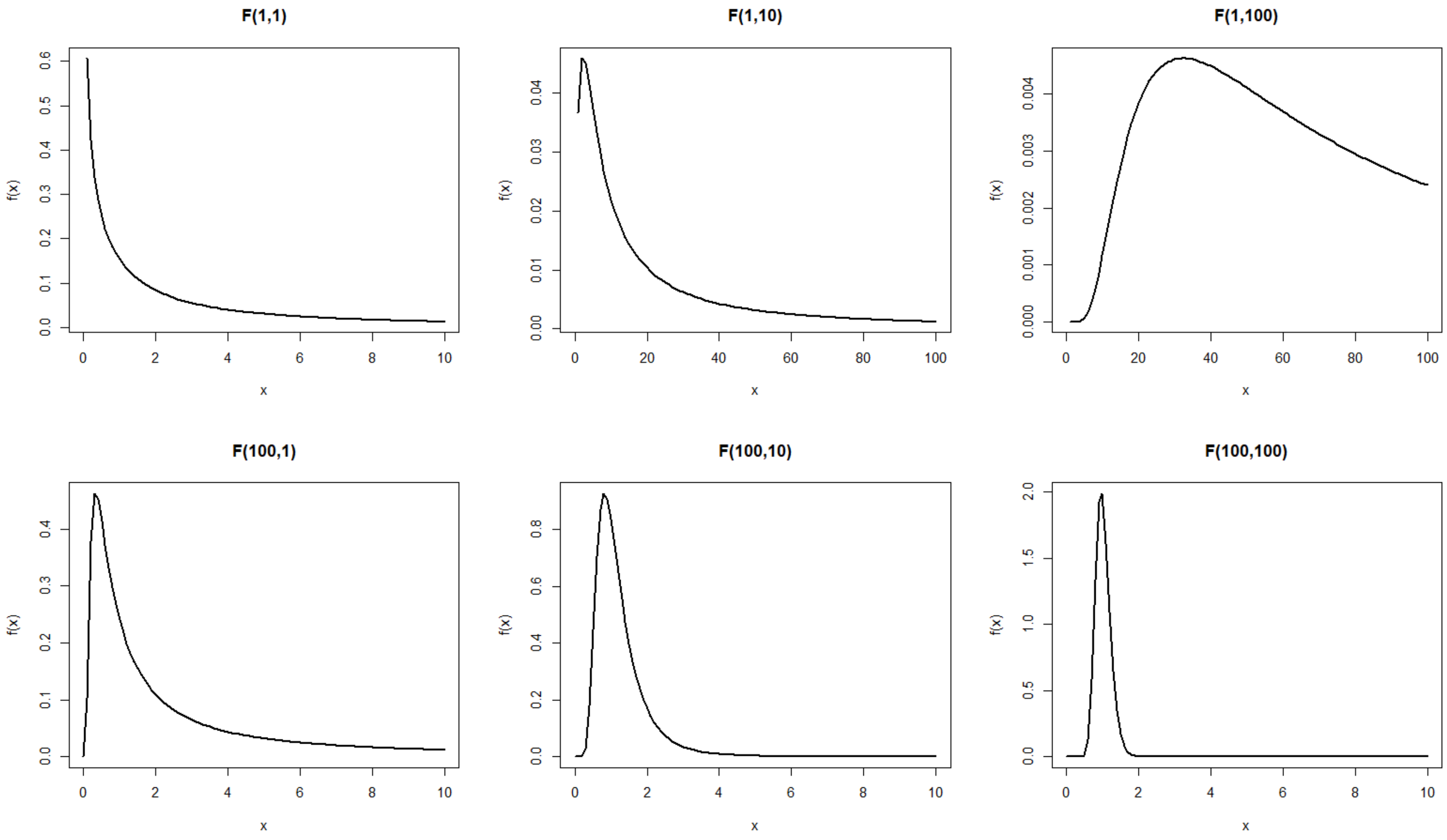
- La división de dos variables aleatorias Chi-cuadradas independientes es una variable con distribución F
- La distribución F, o distribución Fisher-Snedecor, fue propuesta por by Ronald Fisher y George Snedecor
- La distribución F se utiliza en inferencia estadística para pruebas de hipótesis y construcción de intervalos de confianza

11. Distribución F
Resumen

- X: Variable aleatoria con distribución F → $F(\nu_1, \nu_2)$
- Parámetros
  - *ν_1= número de grados de libertad de la variable del numerador > 0*
  - *ν_2 = número de grados de libertad de la variable del numerador > 0*
- Rango de valores
  - $x > 0$
- Función de densidad de probabilidad (pdf)
  - $f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{x\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\sqrt{\frac{(\nu_1 x)^{\nu_1}(\nu_2)^{\nu_2}}{(\nu_1 x+\nu_2)^{\nu_1+\nu_2}}}$ donde $\Gamma()$ es la función Gamma
- Función de distribución acumulada (cdf)
  - $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{t\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\sqrt{\frac{(\nu_1 t)^{\nu_1}(\nu_2)^{\nu_2}}{(\nu_1 t+\nu_2)^{\nu_1+\nu_2}}}\,dt$ (Tabla A7 del libro)
- Esperanza
  - $E(X) = \frac{\nu_2}{\nu_2-2}$ para $\nu_2 > 4$
- Varianza
  - $Var(X) = \frac{2{\nu_2}^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}$ para $\nu_2 > 4$
- Relación con otras distribuciones
  - Para dos variables independientes $\chi^2(\nu_1)$ y $\chi^2(\nu_2)$, la division $\frac{\chi^2(\nu_1)/\nu_1}{\chi^2(\nu_2)/\nu_2}$ es $F(\nu_1, \nu_2)$

11. Distribución F
Efecto de diferentes valores de v_1 y v_2

- La distribución F tiene asimetría positiva o hacia la derecha (*right-skewed*)



12. Resumen

- Las distribuciones continuas se utilizan para modelar medidas de tiempo, tamaños, y cualquier otra variable aleatoria con un intervalo completo de valores posibles.
- En una variable continua, entre dos valores cualesquiera siempre hay otro valor posible.
- La distribución continua de una variable continua se describe por su función de densidad de probabilidad (pdf), que desempeña un papel análogo a la función de masa de probabilidad (pmf) de las variables discretas.
- El cálculo de probabilidades de una variable continua se reduce esencialmente a integrar la función de densidad sobre un intervalo de valores.
- La Esperanza y la Varianza se definen de manera similar que en el caso discreto, reemplazando la función de masa de probabilidad por una función de densidad, y una suma por una integración.
- Como en el caso de las distribuciones discretas, una gran variedad de fenómenos pueden ser descritos por relativamente pocas familias o tipos de distribuciones continuas.
- Las familias continuas más comúnmente utilizadas son Uniforme, Exponencial, Gamma y Normal.
- El Teorema Central del Límite establece que una suma de un gran número de variables aleatorias independientes es aproximadamente normal
  - Se debe utilizar una corrección de continuidad cuando una distribución discreta se aproxima por una distribución continua.
- Otras distribuciones continuas son T de Student, Chi-cuadrado y F, que se utilizan en inferencia estadística para realizar pruebas de hipótesis y construir intervalos de confianza.