Variables aleatorias discretas y sus distribuciones de probabilidad

Contenidos adaptados del libro "Probability and statistics for computer scientists, Second edition, M. Baron" (Capítulo 3)

Contenidos

1. Objetivos

- Recordar el concepto de variable aleatoria
- Diferenciar entre distribución de probabilidad discreta y continua
- Calcular probabilidades, esperanzas, varianzas y desviaciones estándar de variables aleatorias discretas con distribución de Bernoulli, Binomial, Geométrica, Binomial Negativa, y de Poisson
- Calcular el límite de probabilidad según la desigualdad de Chebyshev
- Diferenciar entre variable aleatoria discreta y vector aleatorio discreto
- Obtener la distribución conjunta de un vector aleatorio discreto, y sus distribuciones marginales
- Determinar si dos variables son independientes
- Calcular la esperanza de funciones de más de una variable

2. Conceptos previos

- El conjunto de todos los posibles **resultados** (ω) de un **experimento aleatorio**, se llama **espacio muestral** (Ω)
  - Ejemplo: Un experimento puede ser *"lanzar tres monedas"*, el espacio muestral incluye 8 posibles resultados
    - *Nota: Cara = H, Cruz=T (del inglés "Head" y "Tail")*
    - $\Omega = \{TTT, TTH, THT, THH, HTT, HTH, HHT, HHH\}$
    - $Resultados$: $\omega_1 = TTT, \ldots, \omega_8 = HHH$
- Cualquier conjunto de resultado es un **suceso**. Por lo tanto, los sucesos son subconjuntos del espacio muestral.
  - Ejemplos de sucesos:
    - $Obtener\ sólo\ una\ cruz = \{THH, HTH, HHT\}$
    - $Ontener\ todas\ iguales = \{TTT, HHH\}$

3. Definición de variable aleatoria

- Una variable aleatoria X es una función del resultado de un experimento
  - $X = f(\omega)$
  - El dominio de una variable aleatoria es el espacio muestral.
  - El rango (conjunto de valores posibles) de una variable aleatoria puede ser el conjunto de todos los números reales, o solo números positivos, o todos los enteros, o un intervalo, etc., dependiendo de qué valores posibles pueda tomar la variable aleatoria.
- Una vez que se completa un experimento, y se conoce el resultado ω, se determina el valor de la variable aleatoria X(ω)
- Ejemplo 3.1 (variable aleatoria discreta)
  - X = Número de caras al lanzar tres monedas
  - Si el resultado es “HHH", el valor de X=f(“HHH") = 3 caras
  - El dominio de X es $\Omega = \{TTT, TTH, THT, THH, HTT, HTH, HHT, HHH\}$
  - El rango de X es {0, 1, 2, 3}

3. Definición de variable aleatoria
Tipos de variables aleatorias (Discretas)

- Variables aleatorias discretas
  - Son variables cuyo rango es finito.
  - Sus valores se pueden enumerar o disponer en una secuencia.
  - Ejemplos de variables discretas: el número de trabajos enviados a una impresora, el número de errores de un programa, el número de componentes fallidos, etc.
  - Las variables discretas no tienen que ser números enteros.
    - Por ejemplo, la proporción de componentes defectuosos en un lote de 5 puede ser 0, 1/5=0.2, 2/5=0.4, 3/5=0.6, 4/5=0.5, o 1.
    - Esta variable asume 6 valores diferentes, por lo que es discreta, aunque no tenga valores enteros.

3. Definición de variable aleatoria Tipos de variables aleatorias (Continuas)

- Variables aleatorias continuas
  - Son variables cuyo rango es un intervalo completo de valores.
  - Esto podría ser un intervalo limitado (a, b), o un intervalo sin límites como $(a,+\infty)$, $(-\infty, b)$, o $(-\infty,+\infty)$.
  - A veces, puede ser una unión de varios de estos intervalos. Los intervalos son incontables, por lo tanto, todos los valores de una variable aleatoria no se pueden enumerar en este caso.
  - Ejemplos de variables continuas: tiempos (el tiempo de instalación de un programa, el tiempo de ejecución de u programa, el tiempo de conexión a Internet, el tiempo de espera, la vida útil), también variables físicas como peso, altura, voltaje, temperatura, distancia, etc.
  - **Nota: En una variable continua, entre dos valores cualesquiera siempre hay otro valor posible.**

4. Distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta

- Antes de que se complete un experimento, el resultado ω es desconocido, pero la probabilidad de cada resultado posible se puede calcular, y es la **probabilidad de cada valor posible de la variable aleatoria**
  - *Nota: Recordar la regla de Laplace y la probabilidad de eventos independientes*
- Ejemplo 3.1
  - X = Número de caras al lanzar tres monedas
  - $P\{X = 0\} = P\{tres\ cruces\} = P\{\mathrm{TTT}\} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$
  - $P\{X = 1\} = P\{HTT\} + P\{THT\} + P\{TTH\} = \frac{3}{8}$
  - $P\{X = 2\} = P\{HHT\} + P\{HTH\} + P\{THH\} = \frac{3}{8}$
  - $P\{X = 3\} = P\{HHH\} = \frac{1}{8}$

4. Distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta (pmf y cdf)

- La colección de todas las probabilidades relacionadas con una variable aleatoria discreta X es la distribución de probabilidad de X.
- La **función de masa de probabilidad** de X, o pmf (*probability mass function*), se define como
  - $P(x) = P\{X = x\}$
- La **función de distribución acumulada**, o cdf (*cumulative distribution function*), se define como
  - *Nota: Recordar la probabilidad de la unión de sucesos*
  - $F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{i=\min(X)}^{x} P(i)$

4. Distribución de una variable aleatoria discreta Ejemplo 3.1 (Tirar 3 monedas)

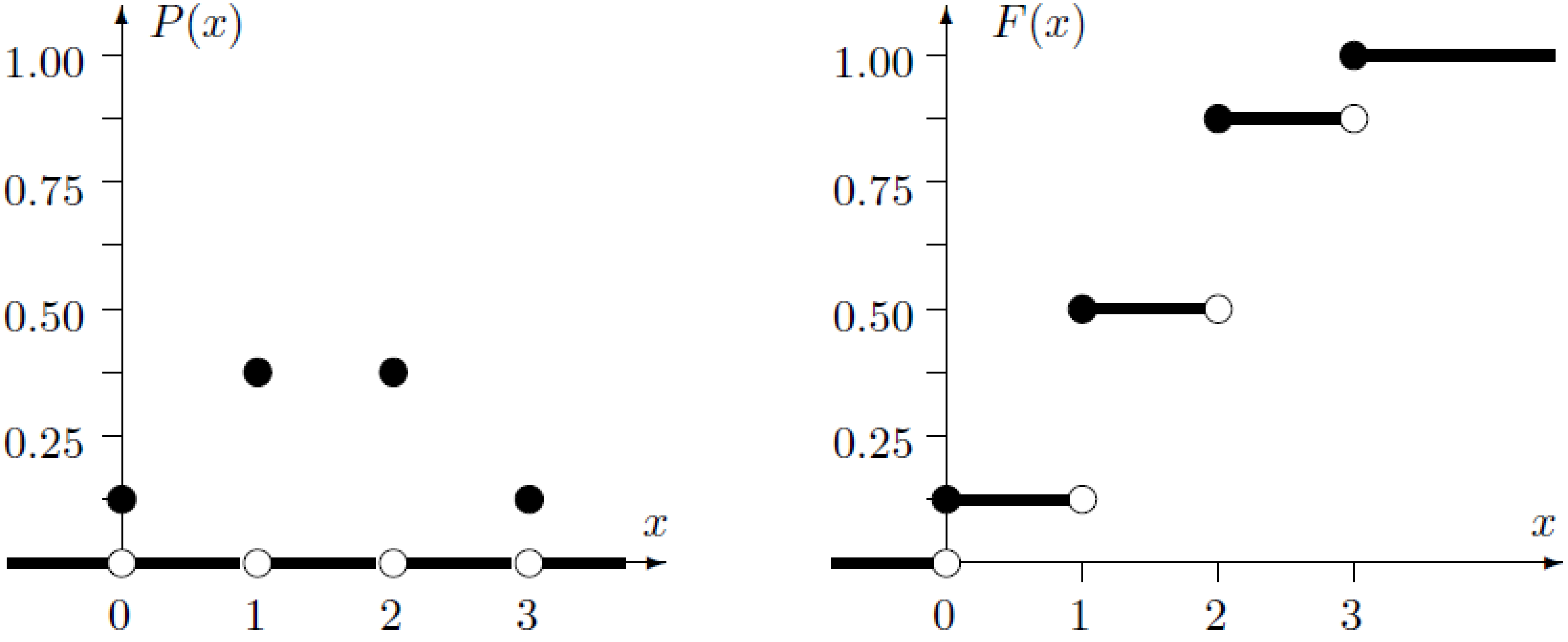


FIGURE 3.1: *The probability mass function $P(x)$ and the cumulative distribution function $F(x)$ for Example 3.1. White circles denote excluded points.*

4. Distribución de una variable aleatoria discreta Propiedades

- Para cada resultado ω, la variable X toma uno y solo un valor x. Esto hace que los sucesos {X = x} sean disjuntos y exhaustivos, y por lo tanto:
  - $\sum_{x=\min(X)}^{\max(X)} P(x) = \sum_{x=\min(X)}^{\max(X)} P\{X = x\} = 1$
- La probabilidad de un intervalo (a, b] se puede calcular a partir de la función de distribución acumulada F(x)
  - $P\{a < X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} = F(b) - F(a)$
- Si el intervalo es [a, b] se tiene en cuenta que $P\{X \leq x\} \neq P\{X < x\}$
  - $P\{a \leq X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X < a\} = P\{X \leq b\} - P\{X \leq (a-1)\}$ $= F(b) - F(a-1)$

4. Distribución de una variable aleatoria discreta Ejemplo 3.3 (Errores en un programa)

- Un programa consta de dos módulos.
- El número de errores X_1 en el primer módulo tiene la pmf $P_1(x)$, y el número de errores X_2 en el segundo módulo tiene la pmf $P_2(x)$, independientemente de X_1, donde
  - $P_1(0) = 0.5;\ P_2(0) = 0.7$
  - $P_1(1) = 0.3;\ P_2(1) = 0.2$
  - $P_1(2) = 0.1;\ P_2(2) = 0.1$
  - $P_1(3) = 0.1;\ P_2(3) = 0$

x	$P_1(x)$	$P_2(x)$
0	0.5	0.7
1	0.3	0.2
2	0.1	0.1
3	0.1	0

- Si Y = número total de errores = X1 + X2
- Encontrar
  a) La función de masa de probabilidad (pmf) de la variable aleatoria Y
  b) La función de distribución acumulada (cdf) de la variable aleatoria Y

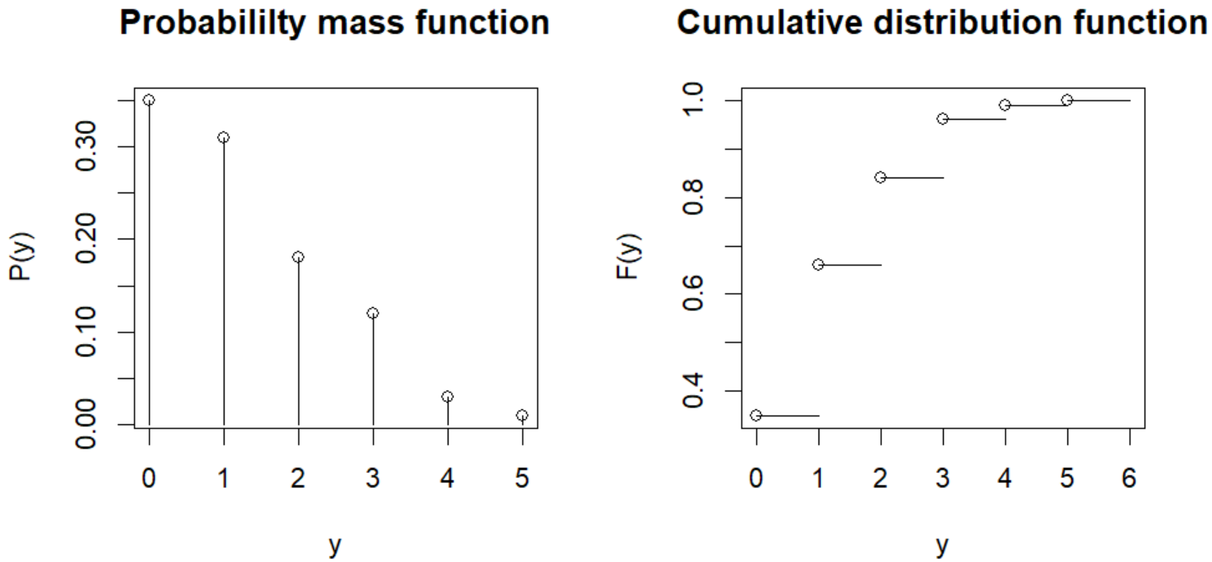
4. Distribución de una variable aleatoria discreta Ejemplo 3.3 (Solución) (I)

x	$P_1(x)$	$P_2(x)$
0	0.5	0.7
1	0.3	0.2
2	0.1	0.1
3	0.1	0

- Dividimos el problema en pasos.
  - En primer lugar, determinar todos los valores posibles de Y,
  - A continuación, calcular la probabilidad de cada valor.
- El número de errores Y es un entero que puede ser:
  - tan bajo como 0 + 0 = 0
  - tan alto como 3 + 2 = 5, ya que $P_2(3) = 0$
- a) Función de la masa de probabilidad (pmf)
  - *Nota: Recordar la probabilidad de la intersección de sucesos*
  - $P_Y(0) = P\{Y = 0\} = P\{X_1 = 0\} \cap P\{X_2 = 0\} = P_1(0)P_2(0) = (0.5)(0.7) = 0.35$
  - $P_Y(1) = P\{Y = 1\} = (P\{X_1 = 0\} \cap P\{X_2 = 1\}) \cup (P\{X_1 = 1\} \cap P\{X_2 = 0\}) = P_1(0)P_2(1) + P_1(1)P_2(0) = (0.5)(0.2) + (0.3)(0.7) = 0.31$
  - …
  - $P_Y(5) = P\{Y = 5\} = P_1(3)P_2(2) = (0.1)(0.1) = 0.01$
  - Se puede comprobar que la suma de las probabilidades es 1
    - $\sum_{y=0}^{5} P_Y(y) = 0.35 + 0.31 + 0.18 + 0.12 + 0.02 + 0.01 = 1$

4. Distribución de una variable aleatoria discreta Ejemplo 3.3 (Solución) (II)

- B) Función de distribución acumulada (cdf)
  - $F_Y(0) = P_Y(0) = 0.35$
  - $F_Y(1) = F_Y(0) + P_Y(1) = 0.35 + 0.31 = 0.66$
  - …
  - $F_Y(5) = F_Y(4) + P_Y(5) = 0.99 + 0.01 = 1$



5. Características de una variable aleatoria

- La distribución de una variable aleatoria o un vector aleatorio, es decir la colección completa de su probabilidades, contiene toda la información sobre su comportamiento.
- Esta información detallada se puede resumir en unas pocas características fundamentales que describen el valor medio, el valor más probable de la variable aleatoria, su variabilidad, etc.
- Las más utilizadas son:
  - Esperanza
  - Varianza
  - Desviación estándar

5. Características de una variable aleatoria Esperanza

- **E(X)**: La esperanza o valor esperado de una variable aleatoria X es su media, el valor promedio.
  - X puede tomar diferentes valores con diferentes probabilidades. Por esta razón, su valor medio no es solo el promedio de todos sus valores, es un promedio ponderado.
- El valor esperado a menudo se denota por la letra griega μ.
- Si X es una variable discreta:
  - $\mu = E(X) = \sum_x xP(x)$
- En cierto sentido, la esperanza es el mejor pronóstico de X.
  - La variable en sí es aleatoria, pero su esperanza no es aleatoria.

5. Características de una variable aleatoria Esperanza. Ejemplo 3.1 (Tres monedas)

- X = Número de caras al lanzar 3 monedas justas
  - P(0) = 1/8 = 0,125
  - P(1) = 3/8 = 0,375
  - P(2) = 3/8 = 0,375
  - P(3) = 1/8 = 0,125

x	$P\{X = x\}$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
Total	1

- $\mu = E(X) = 0 \cdot 0.125 + 1 \cdot 0.375 + 2 \cdot 0.375 + 3 \cdot 0.125 = 1.5\ caras$

5. Características de una variable aleatoria Esperanza de una función

- A menudo nos interesa otra variable, Y, que es una función de X
  - Por ejemplo, el tiempo de descarga depende de la velocidad de conexión, el beneficio de una tienda de ordenadores depende del número de ordenadores vendidos, y el bono de su gerente depende de este beneficio.
- La esperanza de Y = g(X) se calcula mediante una fórmula similar
  - $E(Y) = E\{g(X)\} = \sum_x g(x)P(x)$

5. Características de una variable aleatoria Varianza

- **Var(X)**: La varianza de una variable aleatoria X se define como el cuadrado de la desviación esperada de la media.
  - La varianza es una medida de la variabilidad de una variable aleatoria.
- La varianza a menudo se denotada como σ^2
- Si X es una variable discreta:
  - $\sigma^2 = Var(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_x (x - \mu)^2 P(x)$
- La varianza es siempre positiva
  - Además, es igual a 0 solo si x = μ para todos los valores de x, es decir, cuando X es constantemente igual a μ, por lo que tiene cero variabilidad.
- La varianza también se puede calcular como
  - $Var(X) = E(X^2) - \mu^2$

5. Características de una variable aleatoria Varianza. Ejemplo 3.10 (correo electrónico)

- Considerar dos usuarios:
  - Uno recibe 48 o 52 mensajes de correo electrónico cada día, con la misma probabilidad cada caso (50%)
  - El otro recibe 0 o 100 correos electrónicos, con la misma probabilidad cada caso (50%)
- ¿Cuál es una característica común de estas dos distribuciones, y en qué se diferencian?

5. Características de una variable aleatoria Varianza. Ejemplo 3.10 (solución)

- X=Número de mensajes de correo electrónico por día recibidos por el primer usuario.
- Y=Número de mensajes de correo electrónico por día recibidos por el otro usuario.
- Esperanzas
  - $E(X) = 48 \cdot 0.5 + 52 \cdot 0.5 = 50$
  - $E(Y) = 0 \cdot 0.5 + 100 \cdot 0.5 = 50$
- Varianzas
  - $Var(X) = (48 - 50)^2 \cdot 0.5 + (52 - 50)^2 \cdot 0.5 = 4$
  - $Var(Y) = (0 - 50)^2 \cdot 0.5 + (100 - 50)^2 \cdot 0.5 = 2500$
- Solución
  - Ambos usuarios reciben el mismo número promedio de correos electrónicos (Esperanzas=50).
  - Sin embargo, en el primer caso, el número de correos electrónicos es siempre cercano a la esperanza (50), mientras que en el segundo caso, siempre difiere de la esperanza en 50.
  - La primera variable aleatoria, X, es más estable; tiene baja variabilidad. Tiene una varianza baja (4)
  - La segunda variable, Y, tiene una alta variabilidad. Tiene una varianza alta (2500)

5. Características de una variable aleatoria Desviación estándar

- **Std(X)**: La desviación estándar (o desviación típica) de una variable aleatoria X es la raíz cuadrada de la varianza.
  - La desviación estándar es una medida de la variabilidad de una variable aleatoria.
- El valor de desviación estándar a menudo se denota por σ
- Si X es una variable aleatoria:
  - $\sigma = Std(X) = \sqrt{Var(X)}$
- La desviación estándar se mide en las mismas unidades que X
  - Por ello se suele utilizar como alternativa a la varianza para medir variabilidad

5. Características de una variable aleatoria Desviación estándar. Ejemplo 3.10

- X=Número de mensajes de correo electrónico por día recibidos por el primer usuario.
- Y=Número de mensajes de correo electrónico por día recibidos por el otro usuario.
- Esperanzas
  - $E(X) = 48 \cdot 0.5 + 52 \cdot 0.5 = 50\, mensajes$
  - $E(Y) = 0 \cdot 0.5 + 100 \cdot 0.5 = 50\, mensajes$
- Varianzas
  - $Var(x) = (48 - 50)^2 \cdot 0.5 + (52 - 50)^2 \cdot 0.5 = 4$
  - $Var(X) = (0 - 50)^2 \cdot 0.5 + (100 - 50)^2 \cdot 0.5 = 2500$
- Desviaciones estándar
  - $\mathrm{Std}(X) = \sqrt{4} = 2\, mensajes$
  - $Std(Y) = \sqrt{2500} = 50\, mensajes$

5. Características de una variable aleatoria La desigualdad de Chebyshev

- Conociendo solo la esperanza y la varianza de una variable aleatoria, se puede encontrar el rango de valores más probablemente tomados por esta variable.
- Para cualquier distribución con esperanza E(X)=μ y varianza $Var(X) = \sigma^2$, y para cualquier valor ε positivo, se cumple
  - $P\{|X - \mu| > \varepsilon\} \leq \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$
- La desigualdad de Chebyshev muestra que, en general, la varianza más alta implica mayores probabilidades de grandes desviaciones, y esto aumenta el riesgo de que una variable aleatoria tome valores lejos de su esperanza.
- Ejemplos de aplicación:
  - Evaluar riesgos de acuerdos financieros, asignar fondos, crear carteras de valores óptimas.
  - Asignar de forma óptima la memoria del ordenador, el tiempo de CPU, u otros recursos.

5. Características de una variable aleatoria La desigualdad de Chebyshev. Ejemplo 3.12

- El número de errores en un nuevo software tiene esperanza μ = 20 y una desviación estándar de 2.
  - Según la desigualdad de Chebyshev, la probabilidad de más de 30 errores es menor o igual a 0,04
    - $P\{X > 30\} = P\{|X - 20| > 10\} \leq \left(\frac{2}{10}\right)^2 = 0.04$
- Si la desviación estándar fuera 5 en lugar de 2
  - Entonces, el límite de probabilidad aumenta a 0,25
    - $P\{X > 30\} = P\{|X - 20| > 10\} \leq \left(\frac{5}{10}\right)^2 = 0.25$

5. Características de una variable aleatoria Ejercicios propuestos

- Ejercicios 3.1 a 3.5, 3.8, 3.9 del libro
  - Las respuestas de 3.1, 3.2, 3.3, 3.9 están disponibles en el libro.

6. Distribución de un vector aleatorio discreto

- Si X e Y son variables aleatorias, entonces el par (X, Y) es un **vector aleatorio**.
- La colección de todas las probabilidades de (X, Y) se llama la **distribución conjunta** de X e Y.
- Las distribuciones individuales de X e Y se denominan **distribuciones marginales**.
- La **función de masa de probabilidad conjunta** de X e Y se define como
  - $P(x, y) = P\{(X, Y) = (x, y)\} = P\{X = x \cap Y = y\}$
- $\{(X, Y) = (x, y)\}$ son sucesos exhaustivos y mutuamente excluyentes para diferentes pares (x, y), por lo tanto:
  - $\sum_x \sum_y P(x, y) = 1$

6. Distribución de un vector aleatorio discreto Regla de adición

- La pmf marginal de una variable es la suma de las probabilidades conjuntas sobre todos los valores de la otra variable
  - $P_X(x) = P\{X = x\} = \sum_y P_{(X,Y)}(x, y)$
  - $P_Y(y) = P\{Y = y\} = \sum_x P_{(X,Y)}(x, y)$
- En general, la distribución conjunta no se puede calcular a partir de distribuciones marginales porque no contienen información sobre interrelaciones entre variables aleatorias

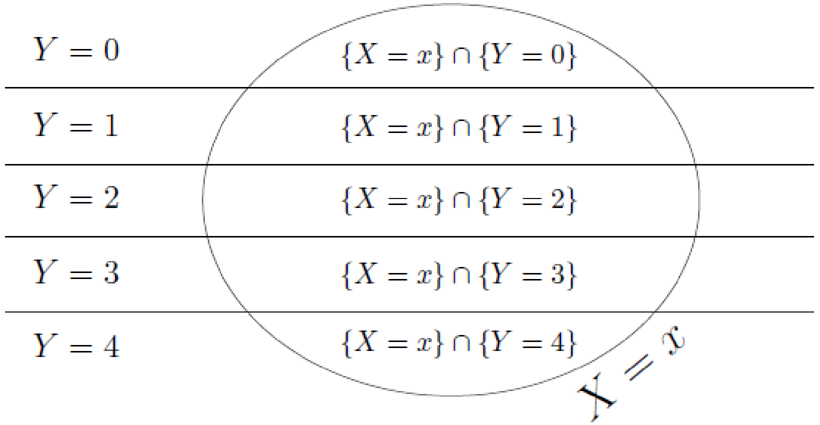


FIGURE 3.2: *Addition Rule: computing marginal probabilities from the joint distribution.*

6. Distribución de un vector aleatorio discreto Independencia de las variables aleatorias

- Las variables aleatorias X e Y son independientes si, para todos los valores de x e y:
  - $P_{(X,Y)}(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$
- Los sucesos {X = x} y {Y = y} son independientes para todo x e y.
- Las variables X e Y toman sus valores independientemente la una de la otra

6. Distribución de un vector aleatorio discreto Ejemplo 3.6 (Errores en un programa)

- Un programa consta de dos módulos.
- X es el número de errores en el primer módulo
- Y es el número de errores en el segundo módulo
- El vector aleatorio tiene función de masa de probabilidad conjunta P(X, Y):
  - P(0, 0) = P(0, 1) = P(1, 0) = 0,2
  - P(1, 1) = P(1, 2) = P(1, 3) = 0,1
  - P(0, 2) = P(0, 3) = 0,05.
- Preguntas:
  a) Encontrar las distribuciones marginales de X e Y
  b) Encontrar la probabilidad de que no haya errores en el primer módulo
  c) Encontrar la distribución del número total de errores en el programa
  d) Averiguar si los errores en los dos módulos ocurren de forma independiente

6. Distribución de un vector aleatorio discreto Ejemplo 3.6 (Solución) (I)

a) Encontrar las distribuciones marginales de X e Y

- Solución: $P_X(x)$ y $P_Y(y)$
- $P_X(0) = P(0,0) + P(0,1) + P(0,2) + P(0,3) = 0.50$
- $P_X(1) = P(1,0) + P(1,1) + P(1,2) + P(1,3) = 0.50$
- $P_Y(0) = P(0,0) + P(1,0) = 0.40$
- $P_Y(1) = P(0,1) + P(1,1) = 0.30$
- $P_Y(2) = P(0,2) + P(1,2) = 0.15$
- $P_Y(3) = P(0,3) + P(1,3) = 0.15$

$P_{(X,Y)}(x,y)$		y = 0	1	2	3	$P_X(x)$
x	0	0.20	0.20	0.05	0.05	0.50
	1	0.20	0.10	0.10	0.10	0.50
$P_Y(y)$		0.40	0.30	0.15	0.15	1.00

b) Encontrar la probabilidad de que no haya errores en el primer módulo

- $P_X(0) = \sum_{y=0}^{3} P_{(X,Y)}(0, y) = 0.20 + 0.20 + 0.05 + 0.05 = 0.50$

6. Distribución de un vector aleatorio discreto Ejemplo 3.6 (Solución) (II)

c) Encontrar la distribución del número total de errores en el programa

- Z = X + Y = número total de errores
- Z puede ser 0, 1, 2, 3 o 4
- $P_Z(0) = P\{X + Y = 0\} = P\{X = 0 \ \cap Y = 0\} = P_{(X,Y)}(0,0) = 0.20$
- $P_Z(1) = P\{X + Y = 1\} = P\{X = 0 \ \cap Y = 1\} + P\{X = 1 \ \cap Y = 0\}$
  $= P_{(X,Y)}(0,1) + P_{(X,Y)}(1,0) = 0.20 + 0.20 = 0.40$
- …
- $P_Z(4) = P\{X + Y = 4\} = P\{X = 1 \ \cap Y = 3\} = P_{(X,Y)}(1,3) = 0.10$
- Ese puede comprobar que
  - $\sum_{z=0}^{4} P_Z(z) = 0.20 + 0.40 + 0.15 + 0.15 + 0.10 = 1$

6. Distribución de un vector aleatorio discreto Ejemplo 3.6 (Solución) (III)

d) Averiguar si los errores en los dos módulos ocurren de forma independiente

- Para decidir sobre la independencia de X e Y, comprobamos si $P_{(X,Y)}(x,y) = P_X(x)P_Y(y)$ para todo x e y
  - $P_{(X,Y)}(0,0) = 0.20 = P_X(0)P_Y(0) = (0.50)(0.40) = 0.2$
  - $P_{(X,Y)}(0,1) = 0.20 \neq P_X(0)P_Y(1) = (0.50)(0.30) = 0.15$
- No hay necesidad de comprobar más. Encontramos un par de x e y (0,1) que no cumple la fórmula de variables aleatorias independientes.
- Por lo tanto, los números de errores en dos módulos no son independientes.

6. Distribución de un vector aleatorio discreto Ejercicios propuestos

- Ejercicios 3.10 a 3.15 del libro
  - Las respuestas de 3.10, 3.11, 3.12, 3.15 están disponibles en el libro.

7. Esperanza de funciones de más de una variable

- Caso general, función g de dos variables aleatorias discretas X e
  - $E\{g(X,Y)\} = \sum_x \sum_y g(x,y) P_{(X,Y)}(x,y)$
    - $P_{(X,Y)}(x,y)$ es la función de masa de probabilidad conjunta del vector aleatorio (X,Y)
- Esperanza de la suma de dos variables X e Y
  - $E(X+Y) = \sum_x \sum_y (x+y) P_{(X,Y)}(x,y) = E(X) + E(Y)$
  - $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$
- Esperanza del producto de dos variables X e Y
  - $E(X \cdot Y) = \sum_x \sum_y (x \cdot y) P(x,y)$
  - Si X e Y son independientes → $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

7. Esperanza de funciones de más de una variable Ejemplo 3.9 (Errores en un programa)

- Continuación del ejemplo 3.6
- Un programa consta de dos módulos.
  - X es el número de errores en el primer módulo
  - Y es el número de errores en el segundo módulo
  - El vector aleatorio tiene función de masa de probabilidad conjunta P(X, Y):
    - $P(0, 0) = P(0, 1) = P(1, 0) = 0.2$
    - $P(1, 1) = P(1, 2) = P(1, 3) = 0.1$
    - $P(0, 2) = P(0, 3) = 0.05$
- Calcular la esperanza del número total de errores: $E(X+Y)$

7. Esperanza de funciones de más de una variable Ejemplo 3.9 (Solución)

- Del ejemplo 3.6:
  - $E(X) = (0)(0.5) + (1)(0.5) = 0.5$
  - $E(Y) = (0)(0.4) + (1)(0.3) + (2)(0.15) + (3)(0.15) = 1.05$
- Por lo tanto:
  - $E(X + Y) = 0.5 + 1.05 = 1.65$ errores

7. Esperanza de funciones de más de una variable. Ejercicios propuestos

- Ejercicios 3.16 a 3.19 del libro
  - Las respuestas de 3.17, 3.18 están disponibles en el libro.

8. Distribución de Bernoulli

- Una variable aleatoria con dos valores posibles, 0 y 1, es una **variable de Bernoulli**
  - su distribución es la distribución de **Bernoulli**,
  - y cualquier experimento con un resultado binario se llama un **ensayo de Bernoulli**.
- La distribución de Bernoulli fue propuesta por Jacob Bernoulli
- Ejemplos de ensayos de Bernoulli:
  - Componentes correctos o defectuosos, partes que pasan o fallan pruebas, señales transmitidas o perdidas, buen o mal funcionamiento del hardware, archivos adjuntos sospechoss o no sospechosos, sitios que contienen o no contienen una palabra clave, lanzar una moneda con cara y cruz, personas que usan o no un teléfono Android.
- Se utilizan nombre genéricos para los dos resultados: "éxito" y "fracaso".
  - Los éxitos no tienen que ser buenos, y los fracasos no tienen que ser malos.
  - Ejemplo
    - X: Variable de Bernoulli que indica si una persona usa o no teléfono con sistema operativo Android
    - Una persona usa un teléfono Android = "éxito" (X=1)
    - Una persona no usa un teléfono Android = "fracaso" (X=0)

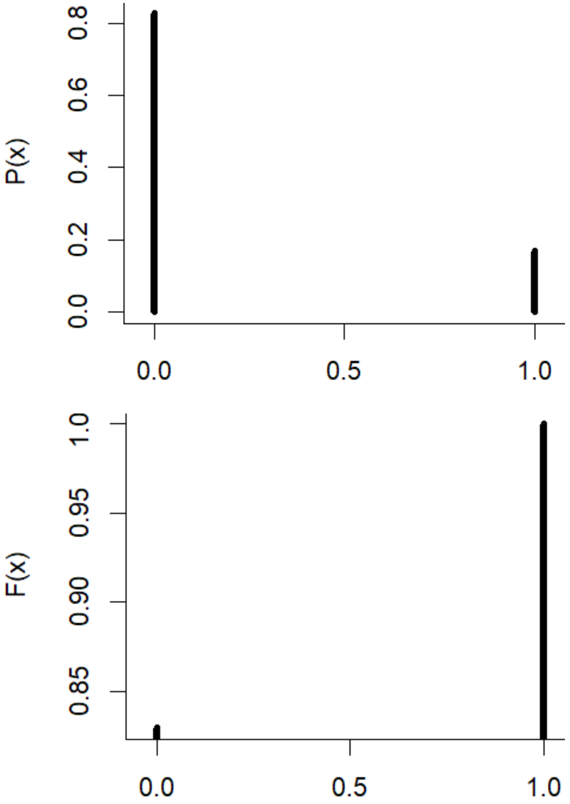
8. Distribución de Bernoulli Resumen

- X: Variable aleatoria con distribución Bernoulli → X: *Bernoulli(p)*
  - *Número de éxitos en un ensayo de Bernoulli*
- Parámetro
  - *p* = probabilidad de éxito
  - Entonces, probabilidad de fracaso = *1-p* (normalmente llamada *q*)
- Rango de valores:
  - *x = 0, 1*
- Función de masa de probabilidad (pmf)
  - $P(x) = \begin{cases} 1-p, & x=0 \\ p, & x=1 \end{cases}$
- Función de distribución acumulada (cdf)
  - $F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1-p, & x=0 \\ 1, & x=1 \end{cases}$
- Esperanza
  - $E(X) = p$
- Varianza
  - $Var(X) = p(1-p)$

8. Distribución de Bernoulli
Ejemplo (Lanzar un dado)

- X: Obtener el lado con 5 puntos cuando al ranzar una vez un dado
  - *p* = probabilidad de éxito = 1/6 = 0,17
    - *Se ha aplicado la* *<u>Ley de Laplace</u>*
  - *1-p* = probabilidad de fracaso = 1-0,17 = 0,83

- Función de masa de probabilidad (pmf)
  - $P(x) = \begin{cases} 0.83, & x = 0 \\ 0.17, & x = 1 \end{cases}$
- Función de distribución acumulada (cdf)
  - $F(x) = \begin{cases} 0.83, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$
- Esperanza: $E(X) = p = 0.17$
- Varianza: $Var(X) = p(1-p) = (0.17)(0.83) = 0.14$



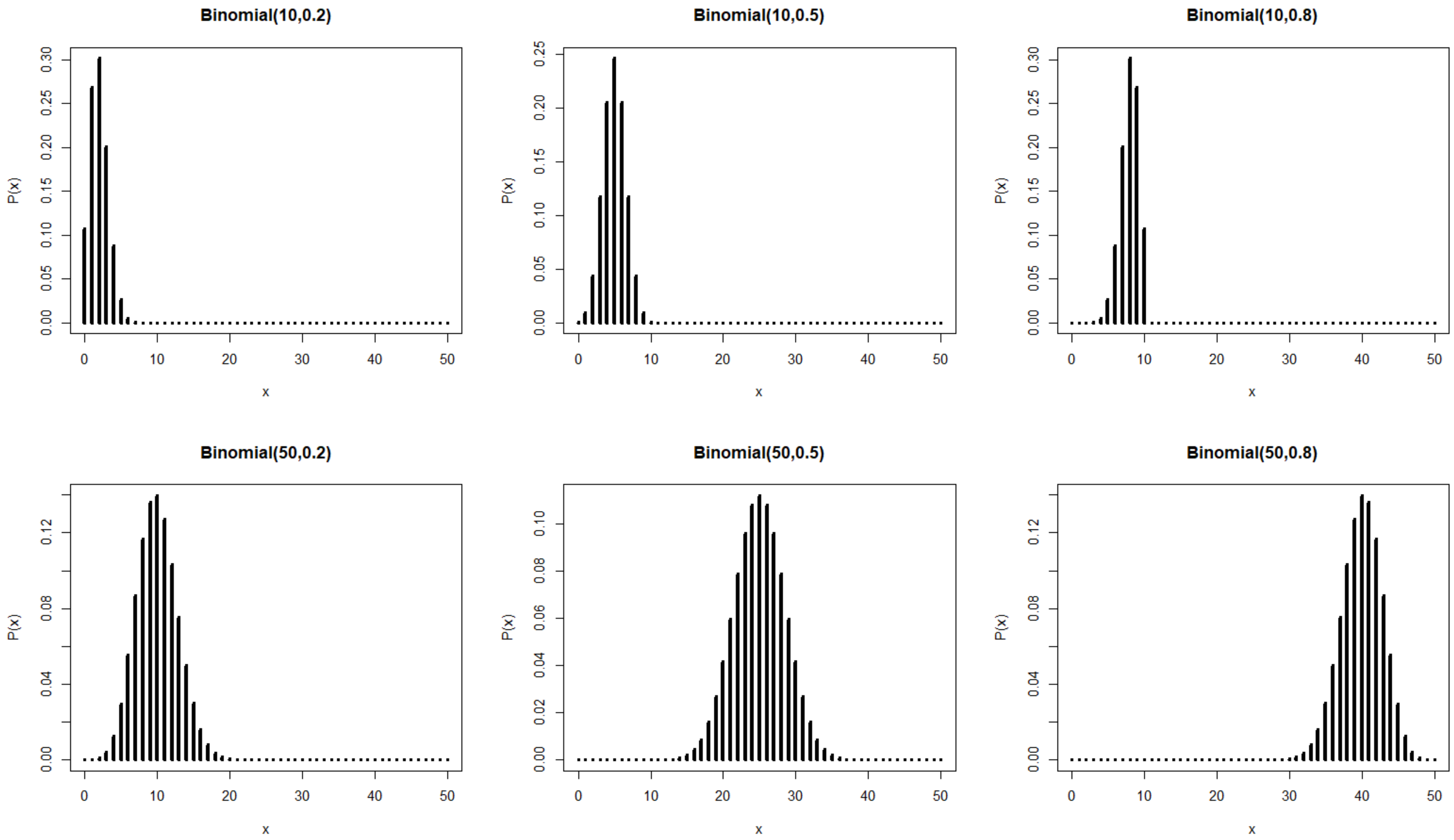
9. Distribución Binomial

- Una variable aleatoria descrita como "el número de éxitos en una secuencia de ensayos independientes de Bernoulli" tiene distribución Binomial.
- Sus parámetros son:
  - n, el número de ensayos
  - p, la probabilidad de éxito en un ensayo
- La distribución Binomial fue propuesta por Jacob Bernoulli
- Una suma de n variables de Bernoulli independientes es una variable Binomial

9. Distribución Binomial Resumen

- X: Variable aleatoria con distribución Binomial → X: *Binomial(n, p)*
  - *Número de éxitos en n ensayos independientes de Bernoulli*
- Parámetros
  - *n* = número de ensayos = 1, 2, 3,...
  - *p* = probabilidad de éxito en un ensayo
- Rango de valores
  - $x = 0, 1, 2, \ldots, n$
- Función de masa de probabilidad (pmf)
  - *En su cálculo se aplica la teoría de la Combinatoria: <u>combinaciones sin sustitución</u>*
  - $P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
- Función de distribución acumulada (cdf)
  - $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$
- Esperanza
  - $E(X) = np$
- Varianza
  - $Var(X) = np(1-p)$
- Relación con otras distribuciones
  - Binomial(n, p) es una suma de n variables de Bernoulli(p) independientes
  - Bernoulli(p) es un caso especial de Binomial (n, p) cuando n=1

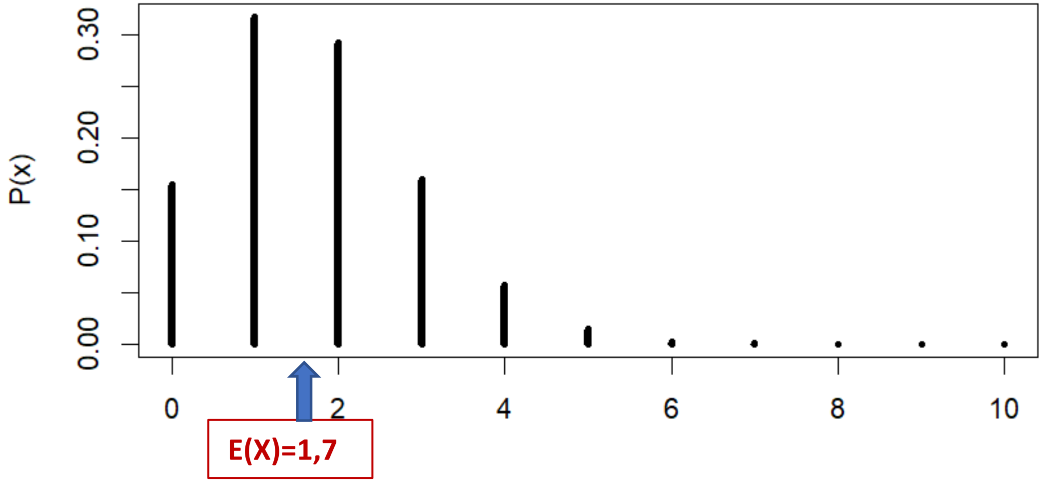
9. Distribución Binomial
Función de probabilidad para diferentes *n* y *p*

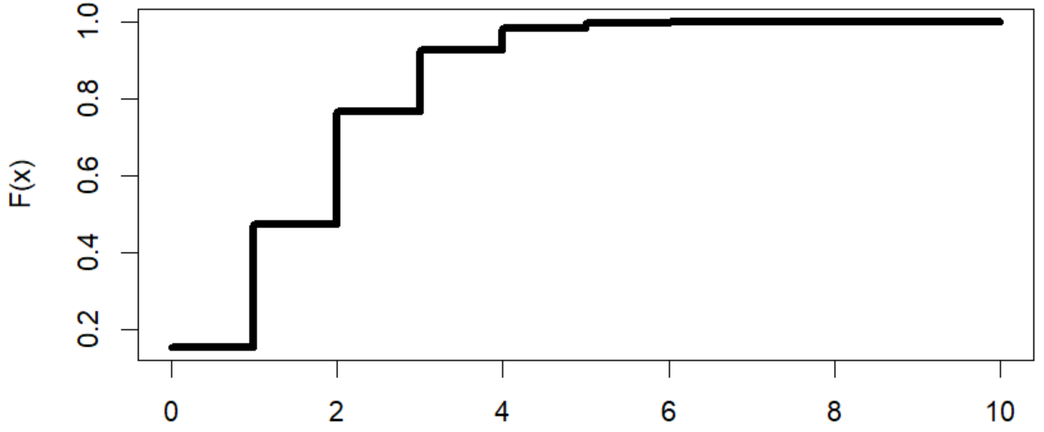


9. Distribución Binomial
Ejemplo (Lanzar un dado)

- X: Número de veces que se obtiene el lado con 5 puntos al lanzar undado 10 veces
  - *p* = probabilidad de éxito en un ensayo = 1/6 = 0,17
  - *1-p* = probabilidad de fracaso en un ensayo = 1-0,17 = 0,83
- Función de masa de probabilidad (pmf)

  - $P(x) = \binom{10}{x} 0.17^x 0.83^{10-x}$
  - $P(0) = 0.155;\ P(1) = 0.318;\ P(2) = 0.293\ldots$
- Función de distribución acumulada (cdf)
  - $F(x) = \sum_{i=0}^{x} P(i)$
  - $F(0) = 0.155;\ \ F(1) = 0.473;\ ..;\ F(10) = 1$
- Esperanza: $E(X) = np = (10)(0.17) = 1.7$
- Varianza: $Var(X) = np(1-p)$ $= (10)(0.17)(0.83) = 1.411$





9. Distribución Binomial
Ejemplo 3.16 (Suscripción de conexión a Internet)

- Como parte de una estrategia de negocio, el 20 % de los nuevos suscriptores de servicios de Internet seleccionados al azar reciben una promoción especial del proveedor.
- Un grupo de 10 vecinos firma para el servicio.
- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 4 de ellos obtengan una promoción especial?

9. Distribución Binomial
Ejemplo 3.16 (Solución)

- X: Número de personas que obtienen una promoción especial (éxitos), sobre 10 personas que solicitan el servicio (ensayos)
  - X es el número de éxitos en 10 ensayos de Bernoulli
  - X tiene distribución Binomial con parámetros n = 10 y p = 0,2.
- Necesitamos encontrar la probabilidad P {X ≥ 4}
- $P\{X \geq 4\} = P\{X = 4\} + \ldots + P\{X = 10\} = 1 - P\{X \leq 3\}$
  - Opción 1: $P\{X \geq 4\} = 1 - (P(0) + P(1) + P(2) + P(3))$
  - Opción 2: $P\{X \geq 4\} = 1 - F(3)$
    - F(3) puede calcularse utilizando una calculadora, un software estadístico o la Tabla A2 del libro
    - Usando un software estadístico como R, se obtiene F(3) = 0.8791261
- $P\{X \geq 4\} = 1 - 0.8791 = 0.1209$

9. Distribución Binomial
Ejemplo 3.16 (Solución) Utilizando la tabla A2

- F(3) puede obtenerse utilizando la Tabla A2 del libro
  - n=10, p=0.2, x=3
  - F(3) = 0,879

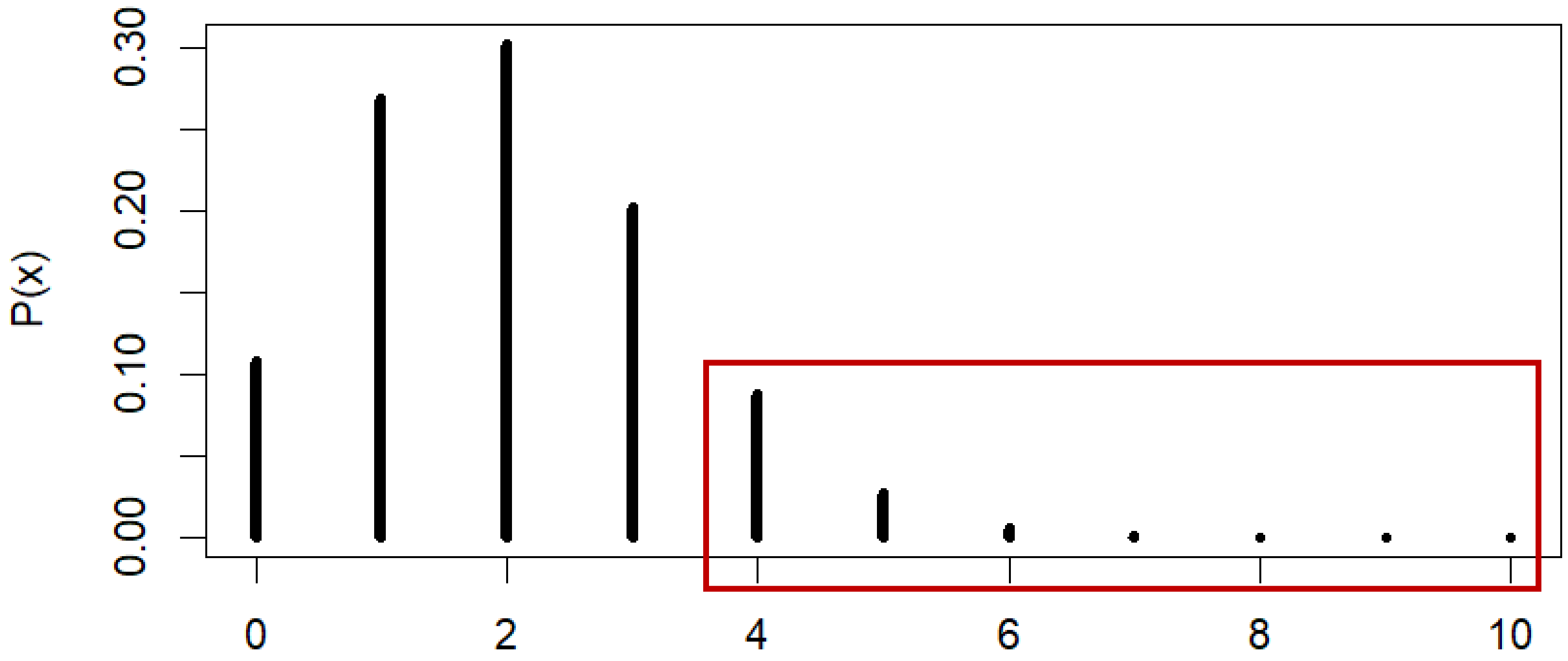
Table A2. Binomial distribution

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	x	p																		
		.050	.100	.150	.200	.250	.300	.350	.400	.450	.500	.550	.600	.650	.700	.750	.800	.850	.900	.950
10	0	.599	.349	.197	.107	.056	.028	.013	.006	.003	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.914	.736	.544	.376	.244	.149	.086	.046	.023	.011	.005	.002	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.988	.930	.820	.678	.526	.383	.262	.167	.100	.055	.027	.012	.005	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	3	.999	.987	.950	.879	.776	.650	.514	.382	.266	.172	.102	.055	.026	.011	.004	.001	.000	.000	.000
	4	1.0	.998	.990	.967	.922	.850	.751	.633	.504	.377	.262	.166	.095	.047	.020	.006	.001	.000	.000

9. Distribución Binomial
Ejemplo 3.16 (Solución) Interpretación gráfica

- P{X ≥ 4} es la suma de la longitud de las líneas de x=4 a X=10



9. Distribución Binomial
Ejemplo 3.17 (Videojuego)

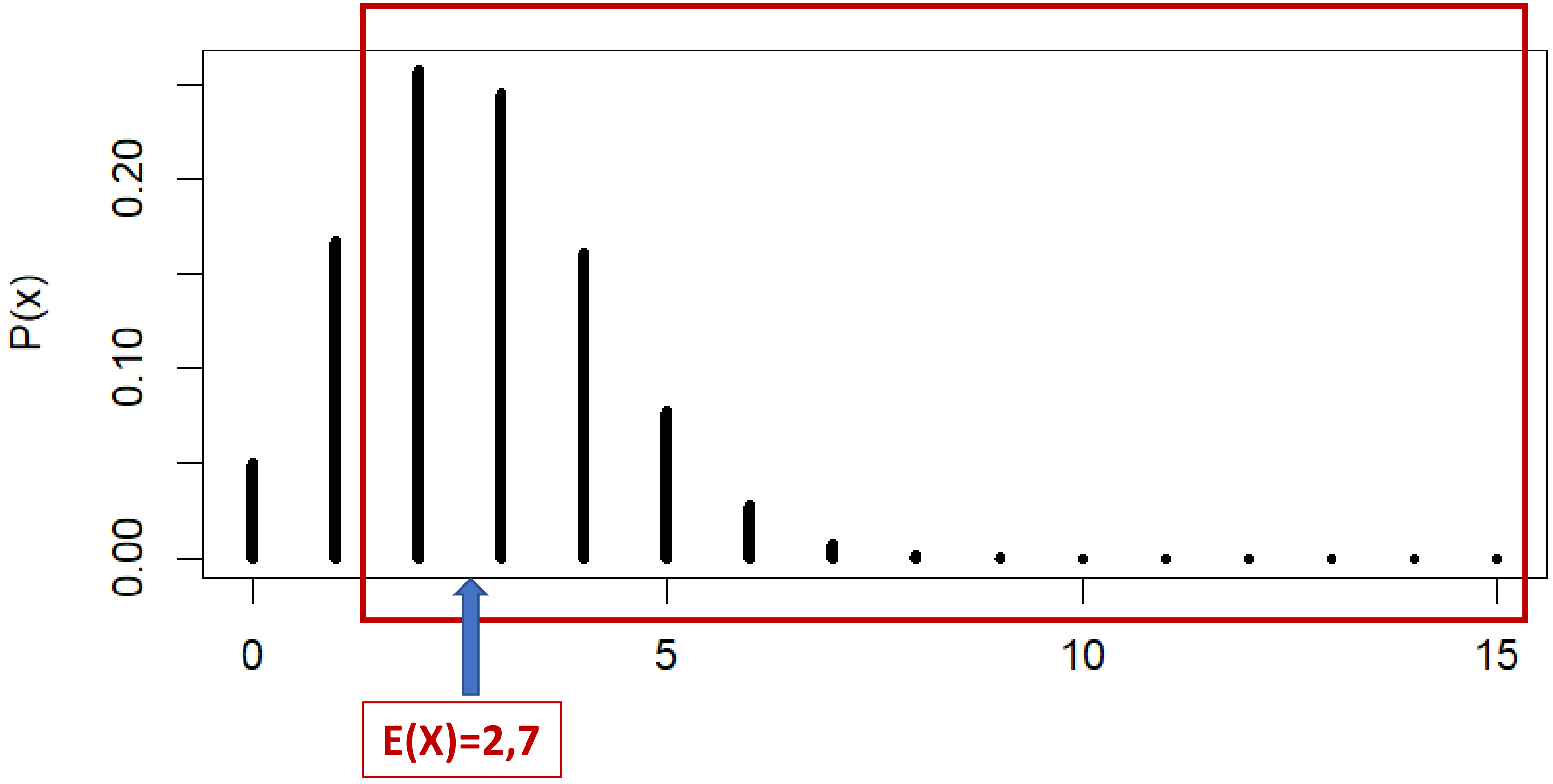
- Se lanza un emocionante videojuego.
- El 60% de los jugadores completan todos los niveles.
- El 30% de los que completan todos los niveles comprará una versión avanzada del juego.
- Entre 15 jugadores,
  a) ¿cuál es el número esperado de jugadores que comprarán la versión avanzada?
  b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos jugadores lo compren?

9. Distribución Binomial
Ejemplo 3.17 (Solución)

- X: número de jugadores (éxitos), entre los 15 jugadores encuestados (ensayos), que comprarán la versión avanzada del juego.
  - X tiene distribución Binomial con n = 15
  - La probabilidad de éxito en un ensayo es *(aplicando el teorema de Bayes):*
    - $p = P\{comprar\ avanzado\}$
      $= P\{compar\ avanzado \mid completar\ todos\ los\ niveles\}\ P\{completar\ todos\ los\ niveles\}$
    - $p = (0.30)(0.60) = 0.18$
- Solución
  a) $E(X) = np = (15)(0.18) = 2.7$
  b) $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X \leq 1\} = 1 - 0.2187 = 0.7813$
    - Opción 1: $P\{X \geq 2\} = 1 - \big(P(0) + P(1)\big) = 1 - (0.0509 + 0.1678) = 0.7813$
    - Opción 2: $P\{X \geq 2\} = 1 - F(1) = 1 - 0.2187 = 0.7813$
      - Usando un software estadístico como R se obtiene: F(1) = 0.2187442

9. Distribución Binomial
Ejemplo 3.17 (Solución) Interpretación gráfica

- P{X≥ 2} es la suma de la longitud de las líneas de x=2 a X=15



9. Distribución Binomial
Ejercicios propuestos

- Ejercicios 3.20 a 3.24, y 3.36 del libro
  - Las respuestas del 3.20 al 3.24 están disponibles en el libro.

10. Distribución Geométrica

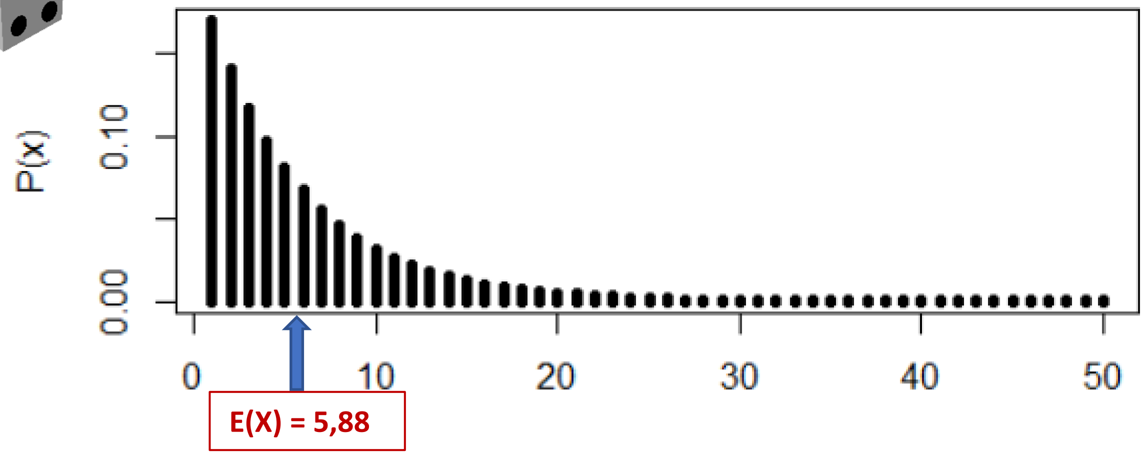
- Una variable aleatoria descrita como "el número de ensayos necesarios para obtener el primer éxito en una secuencia de ensayos independientes de Bernoulli“, tiene distribución Geométrica.
- Su único parámetro es p, la probabilidad de éxito en un ensayo
- Ejemplos:
  - Un buscador web rastrea una lista de páginas web hasta encontrar una que contenga la palabra indicada por el usuario. El número de páginas rastreadas hasta encontrar la primera que contiene la palabra, es una variable aleatoria Geométrica.
  - Un responsable de recursos humanos entrevista uno por uno a los candidatos para una oferta de trabajo. El número de candidatos entrevistados hasta encontrar al que cumple las condiciones de la oferta, tiene distribución Geométrica.

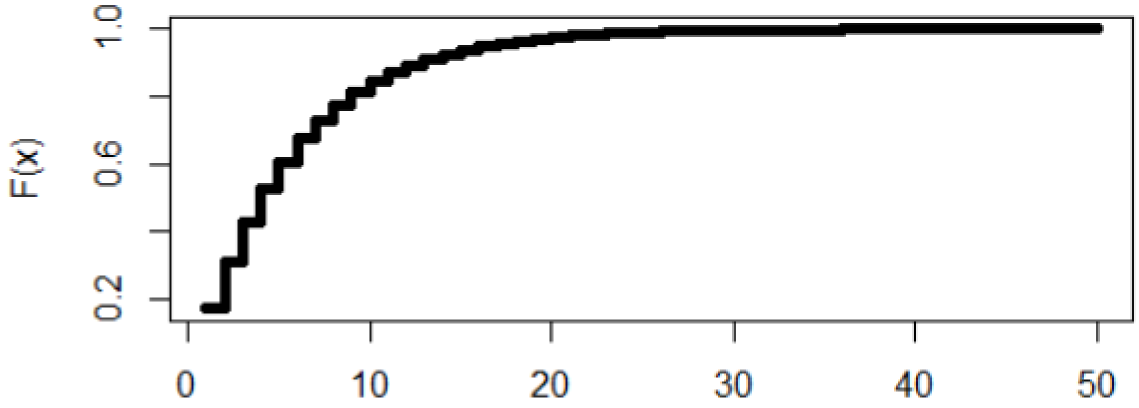
10. Distribución Geométrica Resumen

- X: Variable aleatoria con distribución *Geométrica* → *X: Geometric(p)*
    - *Número de ensayos de Bernoulli hasta el primer éxito*
- Parámetros
    - *p* = probabilidad de éxito en un ensayo
- Rango de valores
    - $x = 1, 2, 3, ..$
- Función de masa de probabilidad (pmf)
    - $P(x) = p(1-p)^{x-1}$
- Función de distribución acumulada (cdf)
    - $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{x} p(1-p)^{i-1} = 1 - (1-p)^x$
- Esperanza
    - $E(X) = \frac{1}{p}$
- Varianza
    - $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

10. Distribución Geométrica
Ejemplo (Dado)

- X: Número de ensayos hasta obtener el lado con 5 puntos
  - *p* = probabilidad de éxito en un ensayo = 1/6 = 0,17
- Función de masa de probabilidad (pmf)
  - $P(x) = (0.17)(1 - 0.17)^{x-1}$
  - $P(1) = 0.17; P(2) = 0.14 \ldots$
- Función de distribución acumulada (cdf)
  - $F(x) = 1 - (1 - 0.17)^{x}$
  - $F(1) = 0.17;\ \ F(1) = 0.31;\ ..$
- Esperanza: $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.17} = 5.88$
- Varianza: $Var(X) = \frac{1-0.17}{0.17^2} = 28.72$





10. Distribución Geométrica
Ejercicios propuestos

- Ejercicios 3.25 y 3.31 del libro

11. Distribución Binomial negativa

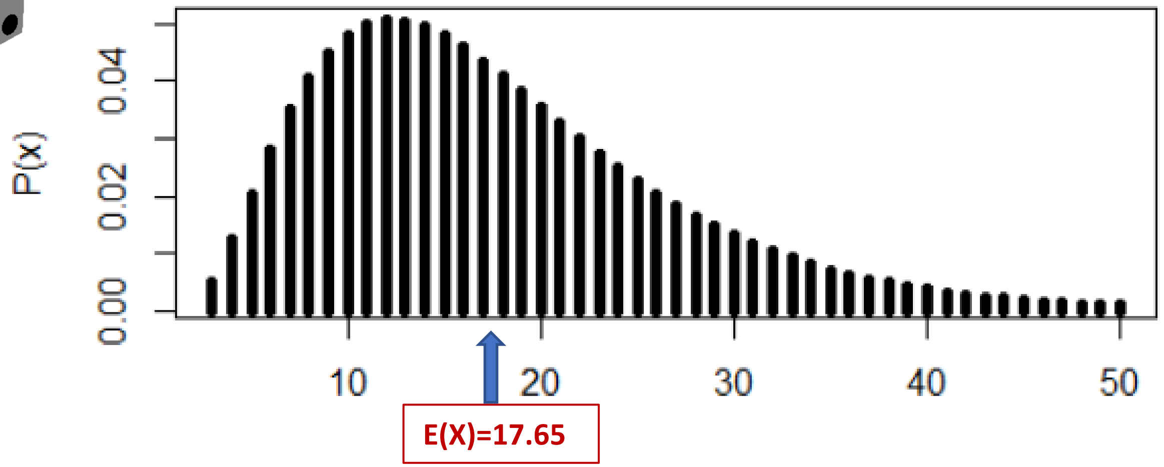
- Una variable descrita como "el número de ensayos necesarios para obtener k éxitos en una secuencia de ensayos independientes de Bernoulli“, tiene distribución Binomial negativa
- Sus parámetros son:
  - n, el número de éxitos
  - p, la probabilidad de éxito en un ensayo
- El nombre "distribución Binomial negativa" se usa para indicar que es lo contrario a “distribución Binomial”
  - Las variables Binomiales cuentan el número de éxitos en un número fijo de ensayos,
  - mientras que las variables Binomiales negativas cuentan el número de ensayos necesarios para obtener un número fijo de éxitos.

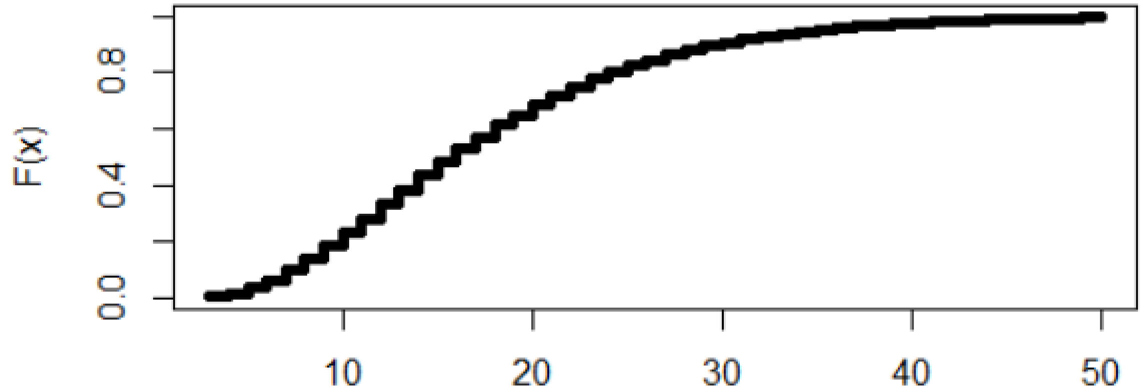
11. Distribución Binomial negativa Resumen

- X: Variable aleatoria con distribución Binomial negativa → *X: NB(k, p)*
  - *Número de ensayos de Bernoulli hasta el éxito k-ésimo*
- Parámetros
  - *K = número de éxitos = 1, 2, 3, ...*
  - *p* = probabilidad de éxito en un ensayo
- Rango de valores
  - $x = k, (k+1), (k+2), , ..$
- Función de masa de probabilidad (pmf)
  - $P(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}$
- Función de distribución acumulada (cdf)
  - $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=k}^{x} \binom{i-1}{k-1} p^k (1-p)^{i-k}$
- Esperanza
  - $E(X) = \frac{k}{p}$
- Varianza
  - $Var(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$
- Relación con otras distribuciones
  - BN(k, p) es una suma de k variables con distribución Geométrica (p)
  - Geométrica (p) es un caso especial de BN(k, p) cuando k=1

11. Distribución Binomial negativa Ejemplo (Dado)

- X: Número de ensayos para obtener 3 veces el lado con 5 puntos
  - *p* = probabilidad de éxito en un ensayo = 1/6 = 0,17
  - *k* = 3
- Función de masa de probabilidad (pmf)
  - $P(x) = \binom{x-1}{2} 0.17^3 0.83^{x-3}$
  - $P(3) = 0.0049; P(4) = 0.122 \ldots$
- Función de distribución acumulada (cdf)
  - $F(x) = \sum_{i=3}^{x} P(i)$
  - $F(3) = 0.0049;\ \ F(1) = 0.0171;\ \ldots$
- Esperanza: $E(X) = \frac{k}{p} = \frac{3}{0.17} = 17.65$
- Varianza: $Var(X) = \frac{3(1-0.17)}{0.17^2} = 86.16$





11. Distribución Binomial negativa
Ejemplo 3.21 (Ensayos secuenciales)

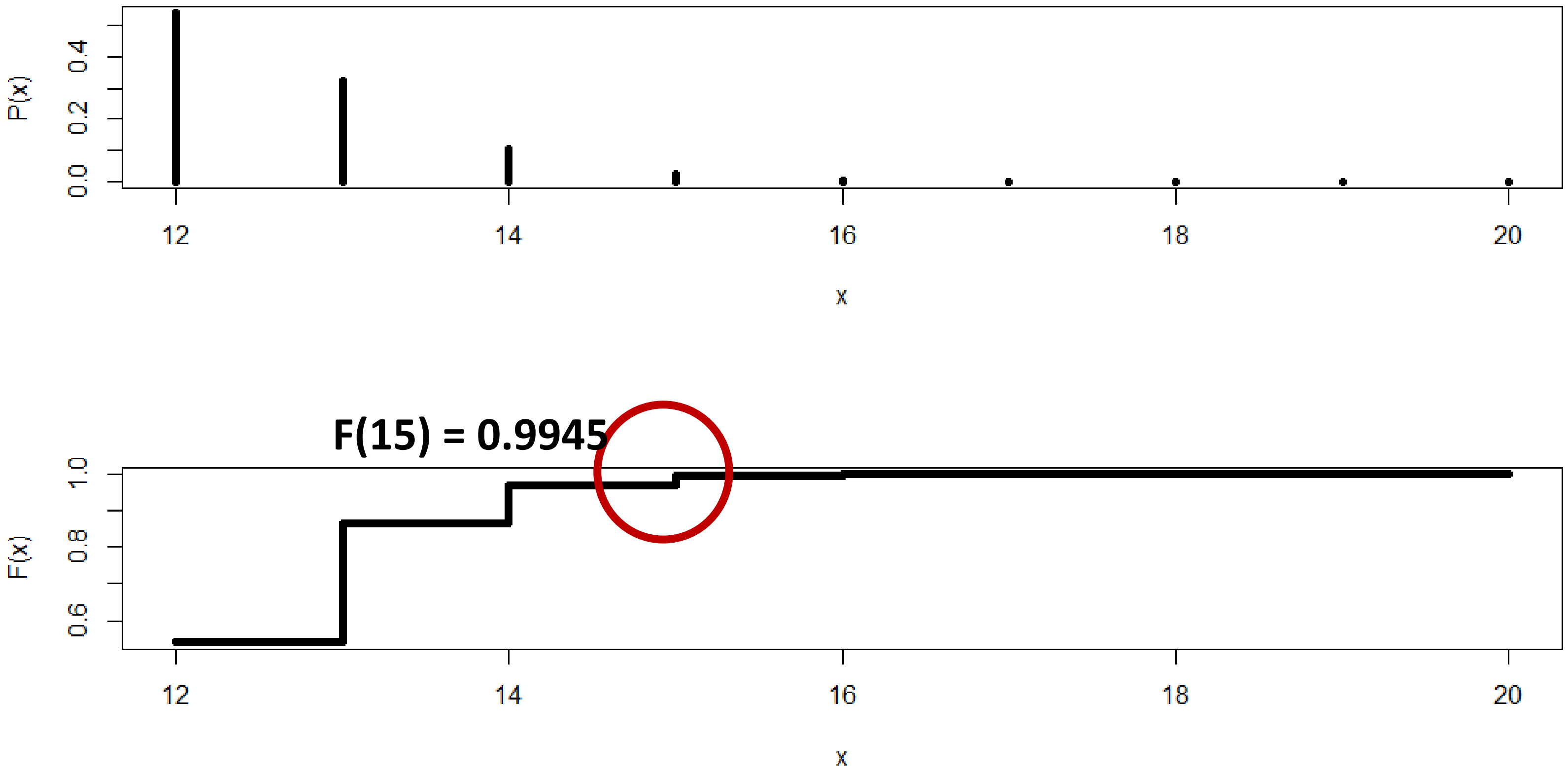
- En una producción reciente, el 5 % de ciertos componentes electrónicos son defectuosos.
- Necesitamos encontrar 12 componentes no defectuosos para nuestros 12 nuevos ordenadores.
- Los componentes se prueban hasta que se encuentran 12 no defectuosos.
- ¿Cuál es la probabilidad de tener que probar más de 15 componentes?

11. Distribución Binomial negativa Ejemplo 3.21 (Solución)

- X: número de componentes probados hasta que se encuentren 12 no defectuosos
  - X tiene distribución Binomial negativa con parámetros k = 12 y p = 0,95
- Necesitamos encontrar la probabilidad P {X > 15}
- $P\{X > 15\} = 1 - P\{X \leq 15\} = 0.0055$
  - Opción 1: $P\{X > 15\} = 1 - F(15) = 1 - 9945 = 0.0055$
    - Utilizando un software estadístico como R se obtiene: $F(15) = 0.9945$
  - Opción 2: Transformar la variable Binomial negativa (X) en una variable Binomial (Y)
    - X = ensayos hasta 12 éxitos = NB (12, 0.95)
    - Y = éxitos en 15 ensayos = Binomial (15, 0.95)
    - P{X> 15} = P{Y<12} = P{Y≤ 11} = $F_Y(11)$=0.0055 *(Utilizando software como R, o Tabla A2)*

11. Distribución Binomial negativa Ejemplo 3.21 (Solución) Interpretación gráfica

- Los valores de P(16), P(17),... son casi cero



11. Distribución Binomial negativa
Ejercicio propuesto

- Ejercicio 3.26 del libro
  - La respuesta está disponible en el libro.

12. Distribución de Poisson

- Una variable descrita como "el número de **eventos raros** que ocurren dentro de un período de tiempo fijo“, tiene distribución de Poisson.
- Eventos raros, o eventos poissonianos, son aquellos tales que es extremadamente improbable que dos de ellos ocurran simultáneamente o dentro de un período muy corto de tiempo.
- Ejemplos de eventos raros
  - Llamadas telefónicas, mensajes de correo electrónico, accidentes de tráfico, apagones de red, ataques de virus, errores en el software, inundaciones y terremotos.
- Su único parámetro es:
  - λ, la frecuencia o el número medio de eventos
- Esta distribución tiene el nombre del matemático Siméon-Denis Poisson

12. Distribución de Poisson Resumen

- X: Variable aleatoria con distribución de *Poisson* → *X: Poisson(λ)*
  - *Número de "eventos raros" durante un intervalo de tiempo fijo*
- Parámetros
  - *λ = frecuencia de los "eventos raros"* $\in (0, \infty)$
- Rango de valores
  - $x = 1, 2, 3, \ldots$
- Función de masa de probabilidad (pmf)
  - $P(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$
- Función de distribución acumulada (cdf)
  - $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$
- Esperanza
  - $E(X) = \lambda$
- Varianza
  - $Var(X) = \lambda$
- Relación con otras distribuciones
  - Caso límite de Binomial(n, p) cuando n → ∞, p → 0, np → λ

12. Distribución de Poisson
Ejemplo 3.22 (Cuentas de Internet)

- Los clientes de un proveedor de servicios de Internet inician nuevas cuentas con una tasa promedio de 10 cuentas por día.
  a) ¿Cuál es la probabilidad de que hoy se inicien más de 8 nuevas cuentas?
  b) ¿Cuál es la probabilidad de que se inicien más de 16 cuentas en un plazo de 2 días?

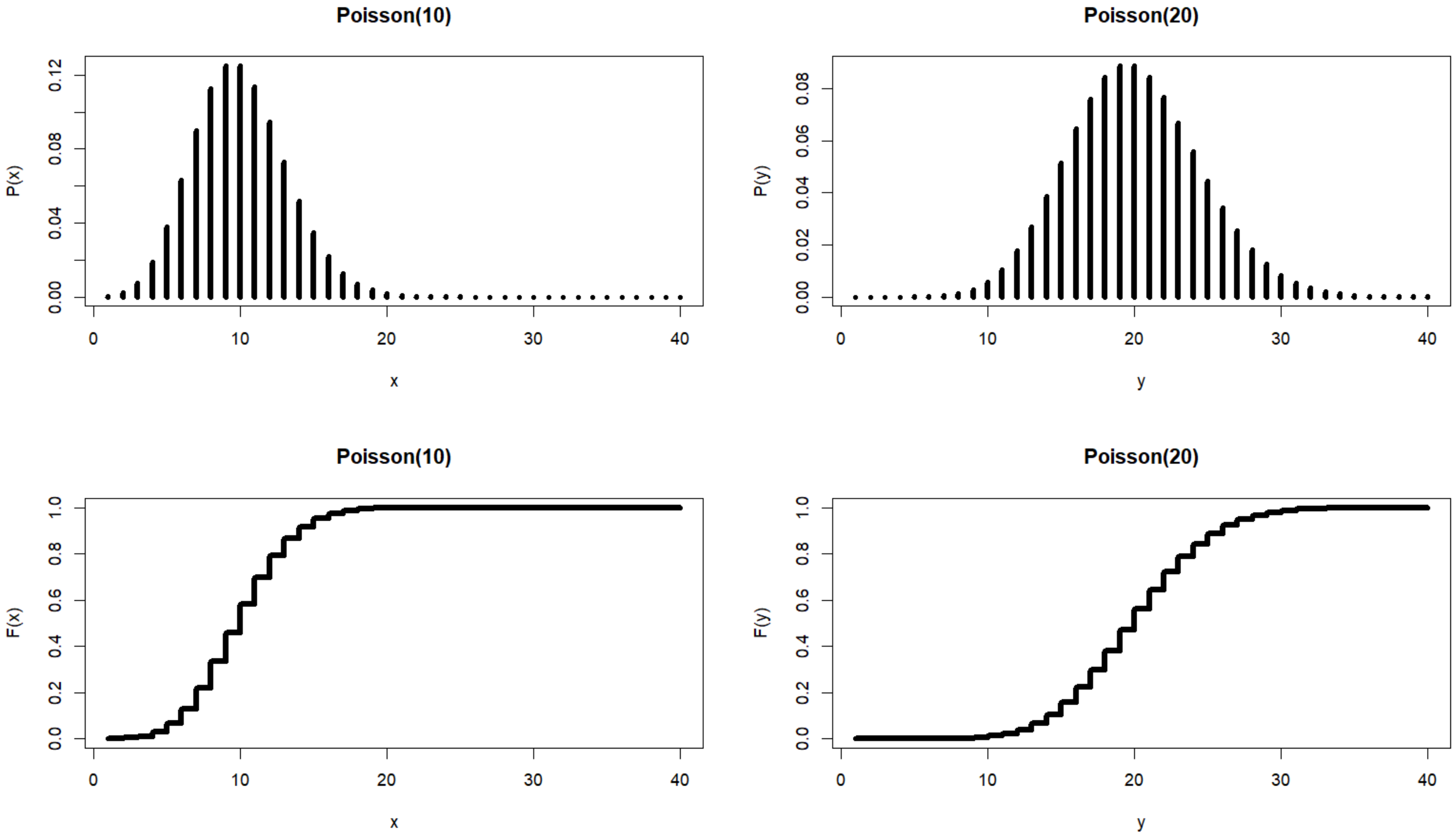
12. Distribución de Poisson Ejemplo 3.22 (Solución)

- Las nuevas iniciaciones de cuentas son eventos raros porque es muy improbable que dos clientes abran cuentas simultáneamente
- X: número de cuentas abiertas en un día
  - X tiene distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 10$

  $a)\ P\{X > 8\} = 1 - P\{X \leq 8\} = 1 - F(8) = 1 - 0.333 = 0.667$
    - F(8) se puede obtener usando software como R, o la Tabla A3 del libro
- Y: número de cuentas abiertas en dos días
  - Y tiene distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 10 * 2 = 20$

  $b)\ P\{Y > 16\} = 1 - P\{Y \leq 16\} = 1 - F(16) = 1 - 0.221 = 0.779$
    - F(16) se puede obtener usando software como R, o la Tabla A3 del libro

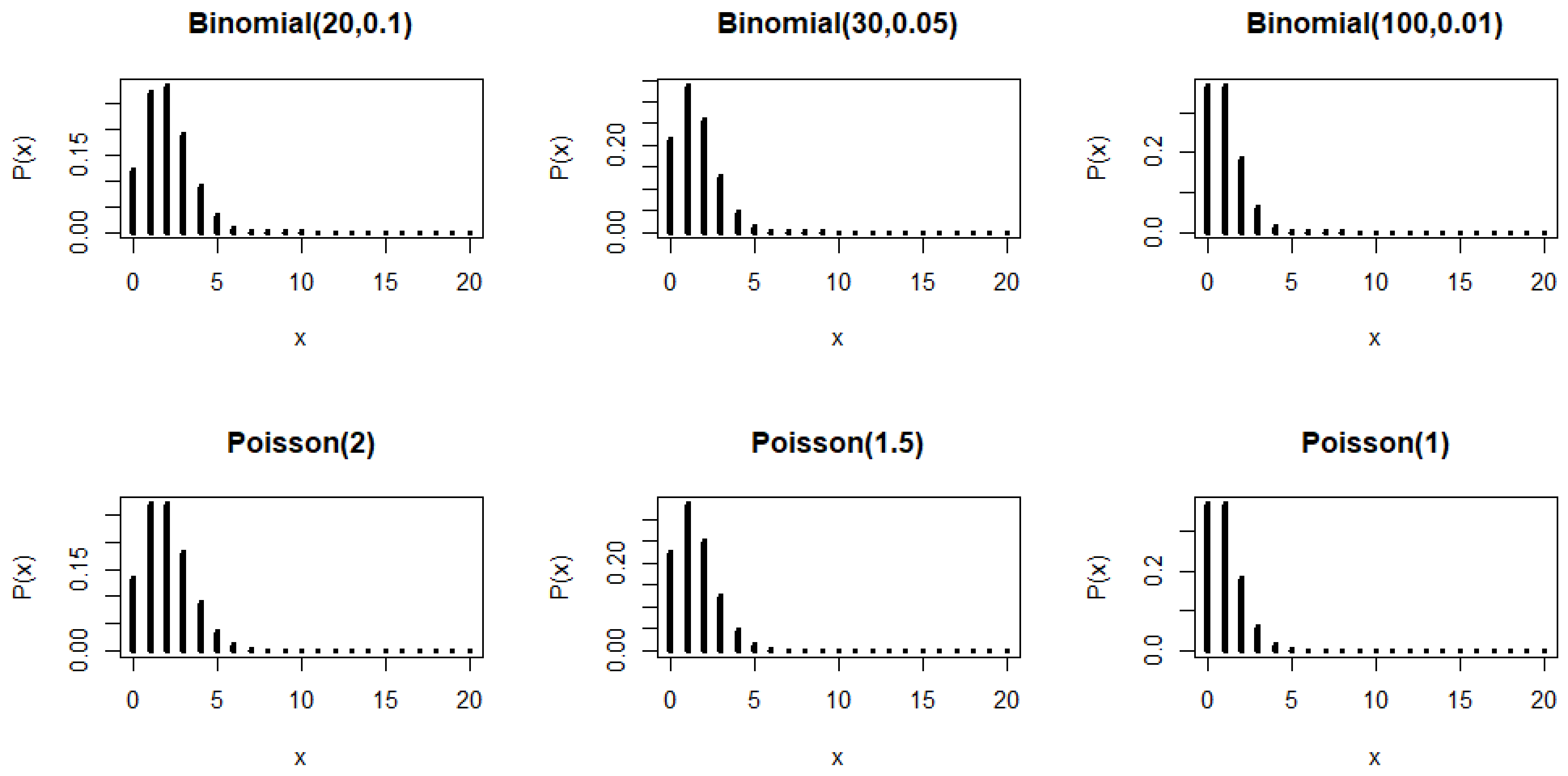
12. Distribución de Poisson
Ejemplo 3.22 (Gráficos)



12. Distribución de Poisson
Aproximación a Poisson de la distribución Binomial

- La distribución de Poisson se puede utilizar para aproximar las probabilidades Binomiales cuando el número de ensayos n es grande, y la probabilidad de éxito p es pequeña
  - En el libro se afirma que tal aproximación es adecuada, para $n \geq 30$ y $p \leq 0{,}05$
  - Pero realmente no hay unanimidad entre los expertos sobre los valores específicos para n y p
- Aproximación
  - $Binomial(n, p) \approx Poisson(\lambda), \quad donde\ np = \lambda$

12. Distribución de Poisson
Aproximación a Poisson de Binomial (Gráficos)



12. Distribución de Poisson
Ejemplo 3.23 (Aproximación Binomial)

- Igual que el ejemplo 3.22
- Supongamos que hay 400000 usuarios potenciales de Internet en el área, y en cualquier día específico, cada uno de ellos abre una nueva cuenta con probabilidad 0.000025
  a) ¿Cuál es la probabilidad de que hoy se inicien más de 8 nuevas cuentas?
  b) ¿Cuál es la probabilidad de que se inicien más de 16 cuentas en un plazo de 2 días?

12. Distribución de Poisson Ejemplo 3.23 (Solución)

- X: número de cuentas abiertas en un día
- X tiene distribución Binomial con parámetros n=400000 y p=0.000025
- n es grande p es pequeño, por lo que se puede aproximar a una distribución Poisson(λ) con λ=np=10
- $P\{X > 8\} = 1 - P\{X \leq 8\} = 1 - F(8)$
  - Usando Posisson(10) → $F(8) = 0.3328197$
  - Usando Binomial(400000, 0.000025) → $F(8) = 0.3328169$
  - Es una muy buena aproximación en este caso

12. Distribución de Poisson
Ejemplo 3.24 (Mensajes electrónicos)

- El 97 % de los mensajes electrónicos se transmiten sin error.
- ¿Cuál es la probabilidad de que de 200 mensajes, al menos 195 se transmitan correctamente?

12. Distribución de Poisson Ejemplo 3.24 (Solución)

- X: número de mensajes transmitidos correctamente.
- X es Binomial con n = 200 y p = 0,97.
- La aproximación de Poisson no se puede aplicar a X porque p es demasiado grande (p> 0.05)
- $P\{X \geq 195\} = 1 - P\{X \leq 194\} = 1 - F_X(194) = 1 - 0.557 = 0.443$
  - No es posible utilizar la Tabla A2, pero es posible calcularla usando software como R
- Opción alternativa: Transformación de la variable aleatoria
  - Y: número de mensajes transmitidos incorrectamente
  - Y es Binomial, con n = 200 y p = 0,03
  - La aproximación de Poisson se puede aplicar a Y porque p≤ 0,05 y n≥ 30, por lo que es aproximadamente Poisson con λ = np = (200)(0,03)=6.
  - $P\{X \geq 195\} = P\{Y \leq 5\} = F_Y(5) \approx 0.446$ *(Es similar a 0,443)*
    - Se puede obtener usando la Tabla A3 o software como R

12. Distribución de Poisson
Ejercicios propuestos

- Ejercicios 3.27, 3.32 a 3.34, y 3.37 del libro
  - Las respuestas de 3.27, 3.32 y 3.37 están disponibles en el libro.

13. Resumen

- Las variables aleatorias discretas pueden tomar un número finito o contable de valores aislados con diferentes probabilidades.
- La colección de todas estas probabilidades es una distribución, que describe el comportamiento de una variable aleatoria.
- El valor promedio de una variable aleatoria es su esperanza.
- La variabilidad en torno a la esperanza se mide por la varianza y la desviación estándar.
- Para cualquier distribución, las probabilidades de grandes desviaciones pueden estar limitadas por la desigualdad de Chebyshev, utilizando solo la esperanza y la varianza.
- Los vectores aleatorios son conjuntos de variables aleatorias; su comportamiento se describe por la distribución conjunta.
- Las probabilidades marginales se pueden calcular a partir de la distribución conjunta.
- Diferentes fenómenos pueden ser descritos adecuadamente por el mismo modelo probabilístico o distribución de probabilidad.
- Las distribuciones discretas más utilizadas son Bernoulli, Binomial, Geométrica, Binomial Negativa y Poisson.
- Cada distribución se utiliza para un determinado tipo de situaciones, tiene sus parámetros y una fórmula clara o una tabla de probabilidades.
- Las variables aleatorias se pueden transformar para facilitar el cálculo de probabilidades.