Probabilidad y combinatoria

Contenidos adaptados del libro "Probability and statistics for computer scientists, Second edition, M. Baron" (Capítulo 2)

Contenidos

1. Objetivos

- Recordar conceptos previos del ámbito de la probabilidad, como experimento aleatorio, resultado de un experimento, espacio muestral, suceso y probabilidad de un suceso
- Diferenciar entre sucesos dependientes e independientes
- Calcular la probabilidad de sucesos
- Aplicar la combinatoria para el cálculo de probabilidades

2. Conceptos previos
Experimento aleatorio

- La Teoría de la Probabilidad es la rama de las Matemáticas que estudia los experimentos o fenómenos aleatorios.
  - Experimento aleatorio es aquel en el que existe incertidumbre sobre el resultado que se obtendrá.
    - Si lo repetimos con las mismas condiciones iniciales no garantiza los mismos resultados.
    - Ejemplos: Lanzamiento de un dado, lanzamiento de una moneda, extracción de una carta de una baraja, partido de fútbol.
  - Experimento determinista es aquel en el que si se repiten las mismas condiciones iniciales se garantiza el mismo resultado.
    - Ejemplos: Calcular el espacio que recorre un objeto que circula a una velocidad constante durante un determinado tiempo, calcular la puntuación de un examen con ninguna respuesta correcta.

2. Conceptos previos
Espacio muestral y suceso

- El conjunto de todos los posibles **resultados** elementales (ω_i) de un **experimento aleatorio**, se llama **espacio muestral** (Ω)
  - Ejemplo: Un experimento puede ser *"lanzar tres monedas"*, el espacio muestral incluye 8 posibles resultados
    - *Nota: Cara = C, Cruz = X*
    - Espacio muestral: $\Omega = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$
    - Resultados: $\omega_1 = CCC, \dots, \omega_8 = XXX$
- Cualquier conjunto de resultados es un **suceso (evento)**. Por lo tanto, los sucesos son subconjuntos del espacio muestral.
  - Ejemplos de sucesos:
    - $Obtener\ tres\ caras = \{CCC\}$
    - $Obtener\ sólo\ una\ cruz = \{CCX, CXC, XCC\}$
    - $Obtener\ mismo\ lado\ en\ todas\ las\ monedas = \{CCC, XXX\}$
    - …
    - Pueden formarse hasta 2^{N_T} sucesos, siendo N_T el tamaño total del espacio muestral (ej. 256 si $N_T = 8$)
- Lo **resultados** pueden denominarse también **sucesos elementales**

2. Conceptos previos Probabilidad

- La probabilidad es una medida de la certidumbre de que ocurra un suceso en un experimento aleatorio.
  - Su valor es un número entre 0 y 1
    - Si es 0 se trata de un suceso imposible
    - Si es 1 se trata de un suceso seguro
  - Ejemplo: si la probabilidad de un suceso es 0.25, quiere decir que:
    - si se repite el experimento muchas veces, lo normal es que 25% de las veces ocurra ese suceso
    - es decir, de cada 100 veces que se repita el experimento, lo normal es que el suceso ocurra 25 veces

2. Conceptos previos
Propiedades de un espacio muestral

- En un espacio muestral con un total N_T resultados posibles:
  - $\Omega = \left\{\omega_1, \omega_2 \dots, \omega_{N_T}\right\}$
- Se cumple:
  - Es exhaustivo
    - $P\{\Omega\} = \sum_{k=1}^{N_T} P\{\omega_k\} = 1$
  - Los resultados son mutuamente excluyentes
    - $P\left\{\omega_i, \omega_j\right\} = 0$ para cada $i \neq j$

2. Conceptos previos
Probabilidad (con resultados equiprobables)

- Cuando todos los N_T posibles resultados ω_k del espacio muestral tienen la misma probabilidad $P\{\omega_k\}$ de que ocurran
  - $P\{\omega_k\} = \frac{1}{k}\ para\ cualquier\ k$
  - $\sum_{k=1}^{N_T} P\{\omega_k\} = 1$
- Regla de Laplace: probabilidad de que ocurra un suceso o evento E:
  - $P\{E\} = \frac{Número\ de\ resultados\ (favorables)\ en\ el\ suceso\ E}{Número\ total\ de\ resultados\ en\ el\ espacio\ muestral\ \Omega} = \frac{N_F}{N_T}$
- Ejemplo
  - $E = Obtener\ mismo\ lado\ en\ todas\ las\ monedas\ al\ lanzar\ 3\ monedas\ a\ la\ vez$
  - $\Omega = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$
  - $E = \{CCC, XXX\}$
  - $N_F = 2$
  - $N_T = 8$
  - $P\{E\} = \frac{2}{8} = 0.25$

2. Conceptos previos
Probabilidad (con resultados no equiprobables)

- Cuando no todos los resultados del espacio muestral tienen la misma probabilidad de que ocurran
  - $P\{\omega_k\} \neq \frac{1}{k}\ para\ cualquier\ k$
  - $\sum_{k=1}^{N_T} P\{\omega_k\} = 1$
- Hay que repetir el experimento n veces y apuntar la frecuencia o número de veces f_E que ocurre el suceso E
  - Cuando se repite el experimento muchas veces la probabilidad coincide con la frecuencia relativa
  - $P\{E\} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f_E}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} f_{r_E}$
- Ejemplo (datos reales de footystats):
  - $E = El\ Rayo\ Vallecano\ gana\ al\ Real\ Madrid$
  - $n = 18$
  - $f_E = 2$ *(El Rayo ha ganado 2 de los últimos 18 partidos)*
  - $P\{E\} = \frac{2}{18} = 0.11$

Imagen: footystats

2. Conceptos previos
Probabilidad. Ejemplo fútbol

- $\Omega = \{Rayo\ gana, Rayo\ pierde, empate\}$
  - $\omega_1 = Rayo\ gana$
  - $\omega_2 = Rayo\ pierde$
  - $\omega_3 = Empate$
- Si fueran resultados equiprobables
  - $P\{\omega_1\} = P\{\omega_2\} = P\{\omega_3\} = \frac{1}{3}$
- Pero no lo son, dependen del presupuesto de cada equipo, calidad de los jugadores, etc.., por lo que se calcula utilizando la historia anterior conocida
  - $P\{\omega_1\} = \frac{2}{18} = 0.11$
  - $P\{\omega_2\} = \frac{14}{18} = 0.78$
  - $P\{\omega_3\} = \frac{2}{18} = 0.11$
- Pero siempre se cumple: $P\{\omega_1\} + P\{\omega_2\} + P\{\omega_3\} = 1$

Imagen: footystats

2. Conceptos previos
Sucesos dependientes e independientes

- Dos sucesos son independientes cuando la ocurrencia de uno de ellos no influye en la ocurrencia o no de otro
  - Ejemplo: Urna con 3 bolas negras y 1 bola verde. Primero se extra una bola, se devuelve a la urna, y luego se extrae otra bola.
    - Los sucesos "Primera bola verde" y "Segunda bola verde" son independientes
    - $P\{Segunda\ bola\ verde\} = \frac{1}{4} = 0.25$ En cualquier caso
- Dos sucesos son dependientes cuando la ocurrencia de uno de ellos influye en la ocurrencia del otro
  - Ejemplo: Urna con 3 bolas negras y 1 bola verde. Primero se extra una bola, NO se devuelve a la urna, y luego se extrae otra bola.
    - Los sucesos "Primera bola verde" y "Segunda bola verde" son dependientes
    - $P\{Segunda\ bola\ verde\} = \frac{0}{3} = 0$ Si ocurrió el suceso "Primera bola verde"
    - $P\{Segunda\ bola\ verde\} = \frac{1}{3} = 0.34$ Si no ocurrió el suceso "Primera bola verde"

3. Combinatoria

- Regla de Laplace: probabilidad de que ocurra un suceso o evento E en un experimento con resultados equiprobables:
  - $P\{E\} = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ total\ de\ resultados} = \frac{N_F}{N_T}$
- Cuando el número de resultados totales o favorables es grande, hay que aplicar combinatoria para contabilizar las posibles combinaciones
- Ejemplo:
  - Probabilidad de que al comprar un billete de lotería de 5 cifras elegido al azar no tenga ninguna cifra repetida
  - $P\{E\} = \frac{Número\ de\ billetes\ de\ lotería\ de\ 5\ cifras\ con\ ninguna\ repetida}{Número\ total\ de\ billetes\ de\ loteria\ con\ 5\ cifras}$

3. Combinatoria
Operaciones de conteo: permutaciones y combinaciones

- Se trata de contar el número de grupos de k elementos que se pueden formar, a partir de un conjunto de n posibles elementos
- Ejemplo: Se dispone de n=3 letras A, B, C y se quieren formar grupos de k=2 letras
- **Permutaciones (o variaciones)**: El orden de los elementos sí importa
  - Ejemplo: No es igual "AB" que "BA" y se cuentan como 2 grupos diferentes
  - Permutaciones con repetición (o reposición): se pueden repetir elementos iguales en cada grupo
    - Ejemplo: El número de permutaciones con repetición es 9 → AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC
  - Permutaciones sin repetición (o reposición): no se pueden repetir elementos
    - Ejemplo: El número de permutaciones sin repetición es 6 → AB, AC, BA, BC, CB
- **Combinaciones**: El orden de los elementos no importa
  - Ejemplo: Es igual "AB" que "BA" y se cuenta como 1 grupo
  - Combinaciones con repetición (o reposición)
    - Ejemplo: El número de combinaciones con repetición es 6 → AA, AB, AC, BB, BC, CC
  - Combinaciones sin repetición (o reposición)
    - Ejemplo: El número de combinaciones sin repetición es 3 → AB, AC, BC

3. Combinatoria
Operaciones de conteo: Fórmulas

Operación	Importa el orden de los elementos	Se pueden repetir los elementos	Fórmula
PERMUTACIONES o VARIACIONES	Si	Si	$P_r(n,k) = n \cdot n \cdots n = n^k$
		No	$P(n,k) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
COMBINACIONES	No	Si	$C_r(n,k) = \binom{k+n-1}{k} = \frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!}$
		No	$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

NOTA: $n! = factorial\ del\ \text{número}\ entero\ n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$, siendo $0! = 1$

3. Combinatoria
Ejemplo 2.27 (Permutaciones con repetición)

- En un sitio web se exige una password de 8 caracteres
- Se pueden usar dígitos de 0 a 9, y letras mayúsculas y minúsculas, teniendo en cuenta un alfabeto de 26 letras
- Un programa espía puede probar 1 millón de passwords en 1 segundo
    - a) ¿Cuál es la probabilidad de que el programa adivine la password en una semana?
    - b) ¿Cuánto tardará como máximo en adivinar la password? Calcularlo usando la la probabilidad obtenida en el apartado anterior

3. Combinatoria
Ejemplo 2.27 (Solución)

- $n = 10\ dígitos + 26\ letras\ may. + 26\ letras\ min. = 62$
- $k = 8\ dígitos\ de\ la\ password$
- E=Adivinar la password en un intento
  - $P\{E\} = \frac{N_F}{N_T} = \frac{1}{P_r(62,8)} = \frac{1}{62^8} = \frac{1}{218340105584896}$
- a) En una semana se realizan 604800000000 intentos
  - $P\{Adivinar\ en\ 1\ semana\} = P\{E\} + \cdots + P\{E\} = 604800000000 \cdot P\{E\}$
  - $P\{Adivinar\ en\ 1\ semana\} = 604800000000 \cdot \frac{1}{218340105584896} = 0.00277$
- b) Se trata de conseguir un suceso seguro, con probabilidad 1
  - $P\{acertar\ seguro\} = 1 = nº\ de\ semanas \cdot P\{Adivinar\ en\ 1\ semana\}$
  - $nº\ de\ semanas = \frac{1}{P\{Adivinar\ en\ 1\ semana\}} = \frac{1}{0.00277} = 361\ semanas \approx 7\ años$

3. Combinatoria
Ejemplo 2.28 (Permutaciones sin repetición)

- ¿De cuantas formas se pueden sentar 10 estudiantes en una clase con 15 sillas?
- Solución
  - $n = 15\ sillas$
  - $k = 10\ estudiantes$
  - $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} = P(15{,}10) = \frac{15!}{(15-10)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} =$
    $= 6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15 = 10897286400\ formas\ diferentes$

- Interpretación: Los estudiantes entran en el aula uno por uno, el primer estudiante tiene 15 opciones de sillas libres para elegir, entonces una silla es ocupada y quedan 14 sillas libres para los 9 estudiantes restantes. El segundo estudiante tiene solo 14 opciones de sillas, etc., y el último estudiante puede elegir una de las 6 sillas disponibles en ese momento.
  - $P(15{,}10) = 15 \cdot Permutaciones\ de\ 9\ estudiantes\ restantes\ en\ 14\ sillas = 15 \cdot P(14{,}9)$
  - $P(14{,}9) = 14 \cdot Permutaciones\ de\ 8\ estudiantes\ restantes\ en\ 13\ sillas = 14 \cdot P(13{,}8)$
  - …
  - $P(7{,}2) = 7 \cdot Permutaciones\ de\ 1\ estudiante\ restante\ en\ 6\ sillas = 7 \cdot P(6{,}1)$
  - $P(6{,}1) = Permutaciones\ de\ 1\ estudiante\ en\ 6\ sillas = 6$

3. Combinatoria
Ejemplo 2.29 (Combinaciones sin repetición)

- Un programa antivirus detecta que 3 carpetas en un ordenador, de un total de 10, están infectadas.
- Las 10 carpetas se denominan A, B, C, D, E, F, G, H, I, J
- ¿Cuál es la probabilidad de que estén infectadas las carpetas C, F y G?

3. Combinatoria
Ejemplo 2.29 (Solución)

- $Carpetas = A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$
- $n = 10\ carpetas\ en\ el\ ordenador$
- $k = 3\ carpetas\ infectadas$
- $P\{Infectadas\ C, F\ y\ G\} = \frac{N_F}{N_T} = \frac{1}{C(10,3)} = \frac{1}{120} = 0.0083$
  - $C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{720}{6} = 120$
- NOTA:
  - No son permutaciones porque el orden no importa: ABC=ACB=BAC=BCA=CAB=CBA
  - Se usan combinaciones sin repetición porque no se pueden repetir las carpetas, es decir, no puede ocurrir AAB, AAA, ABB, …

3. Combinatoria
Ejemplo (Combinaciones con repetición)

- ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar simultáneamente tres monedas iguales se obtenga una cara y dos cruces?
- Solución
  - $P\{1\ cara\ y\ 2\ cruces\} = \frac{N_F}{N_T} = \frac{1}{C_r(2,3)} = \frac{1}{4} = 0.25$
    - $C_r(n,k) = \binom{k+n-1}{k} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(3+2-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{4}{1} = 4$
  - Interpretación:
    - Hay 4 casos posibles: $3\ caras, 2\ caras\ y\ 1\ cruz, 1\ cara\ y\ 2\ cruces, 2\ cruces$
    - Son combinaciones porque no importa el orden de las caras y cruces, al lanzar las monedas a la vez
    - Hay repetición porque puede haber más de una cara o de una cruz

3. Combinatoria
Ejercicios propuestos

- Ejercicios 2.14, 2.25 a 2.29 del libro
  - Las respuestas de 2.26 y 2.28 están disponibles en el libro

- Otros ejercicios resueltos:
  - Proyecto Descartes

4. Reglas de probabilidad

- Un suceso es un conjunto de resultados
  - Ejemplo: suceso $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$
- Por lo que se pueden aplicar operaciones con conjuntos
  - Ejemplo: sucesos A y B
  - Unión de sucesos: $A \cup B$
  - Intersección de sucesos: $A \cap B$
  - Complemento de un suceso: $\bar{A}$
  - Diferencia de sucesos: $A \backslash B$ ó $A - B$

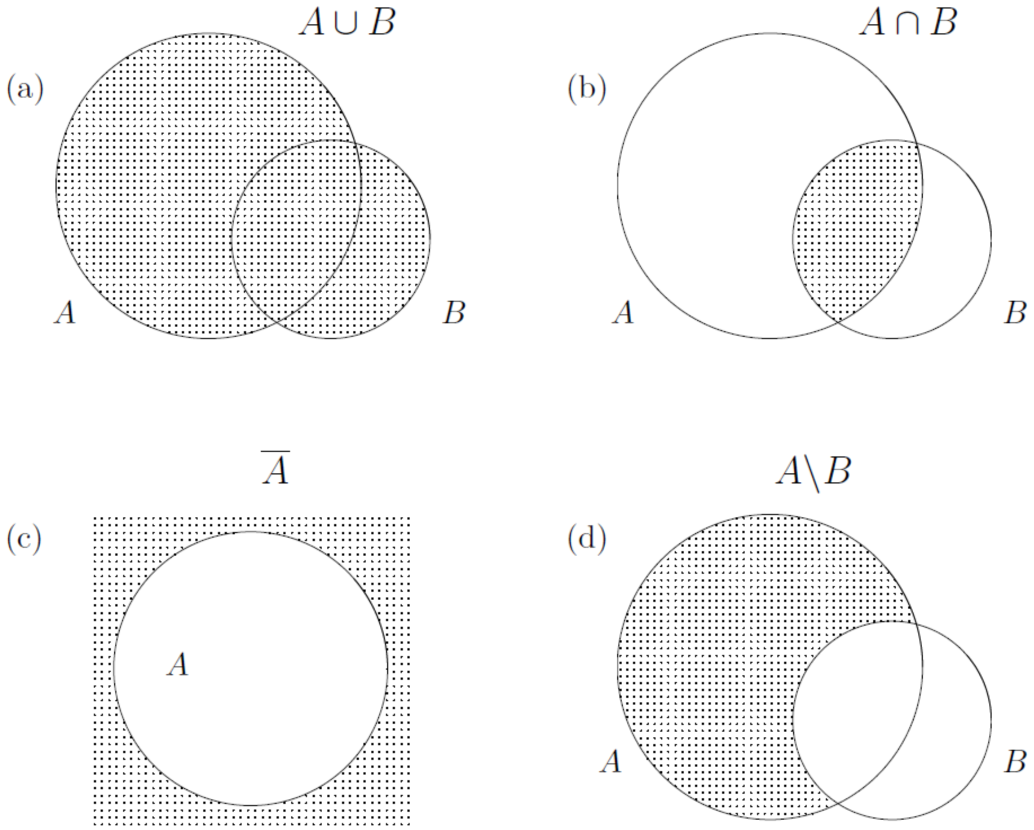


FIGURE 2.1: *Venn diagrams for (a) union, (b) intersection, (c) complement, and (d) difference of events.*

4. Reglas de probabilidad
Probabilidad de la intersección de sucesos

- $P\{A \cap B\} = Probabilidad\ de\ que\ ocurra\ el\ suceso\ A\ \boldsymbol{y}\ el\ suceso\ B$
- Si los sucesos son mutuamentre excluyentes (incompatibles o disjuntos)
  - $P\{A \cap B\} = 0$
  - Ejemplo:
    - $A = Obtener\ cruz\ al\ lanzar\ una\ moneda$
    - $B = Obtener\ cara\ al\ lanzar\ una\ moneda$
- Si los sucesos A y B son independientes (la ocurrencia de uno de ellos no influye en la ocurrencia o no del otro)
  - $P\{A \cap B\} = P\{A\} \cdot P\{B\}$
  - Ejemplo:
    - $A = Obtener\ cruz\ al\ lanzar\ una\ moneda$
    - $B = Obtener\ 4\ puntos\ al\ lanzar\ un\ dado$
    - $P\{A\} = \frac{1}{2} = 0.5$
    - $P\{B\} = \frac{1}{6} = 0.17$
    - $P\{A \cap B\} = P\{A\} \cdot P\{B\} = (0.5)(0.17) = 0.085$

Imágenes: soyvisual.org

4. Reglas de probabilidad
Probabilidad de la unión de sucesos

- $P\{A \cup B\} = Probabilidad\ de\ que\ ocurra\ el\ suceso\ A\ \boldsymbol{o}\ el\ suceso\ B$
- $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}$
- Ejemplo
  - $A = Obtener\ cruz\ al\ lanzar\ una\ moneda$
  - $B = Obtener\ cara\ al\ lanzar\ una\ moneda$
  - $P\{A\} = \frac{1}{2} = 0.5$
  - $P\{B\} = \frac{1}{2} = 0.5$
  - $P\{A \cap B\} = 0$ por ser mutuamente excluyentes
  - $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\} = 0.5 + 0.5 + 0 = 1$

4. Reglas de probabilidad
Probabilidad del complemento de un suceso

- $P\{\bar{A}\} = Probabilidad\ de\ que\ no\ ocurra\ el\ suceso\ A$
- $P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}$
- Ejemplo:
  - $A = Obtener\ 4\ puntos\ al\ lanzar\ un\ dado$
  - $\bar{A} = No\ obtener\ 4\ puntos\ al\ lanzar\ un\ dado$
  - $P\{A\} = \frac{1}{6} = 0.17$
  - $P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0.83$

Imágen: soyvisual.org

4. Reglas de probabilidad
Probabilidad de la diferencia de sucesos

- $P\{A \backslash B\} = P\{A - B\} =$ $Probabilidad\ de\ que\ ocurra\ el\ suceso\ A\ pero\ no\ el\ suceso\ B$
- $P\{A - B\} = P\{A\} - P\{A \cap B\}$
- Ejemplo
  - $A = Obtener\ cruz\ al\ lanzar\ una\ moneda$
  - $B = Obtener\ cara\ al\ lanzar\ una\ moneda$
  - $P\{A\} = \frac{1}{2} = 0.5$
  - $P\{A \cap B\} = 0$ por ser mutuamente excluyentes
  - $P\{A - B\} = P\{A\} - P\{A \cap B\} = 0.5 - 0 = 0.5$

4. Reglas de probabilidad
Ejemplo 2.18 (Disco duro)

- Hay un 1 % de probabilidad de que un disco duro de una empresa se bloquee.
- La empresa guarda dos copias de seguridad, cada una con una probabilidad del 2 % de bloqueo.
- Los tres componentes son independientes entre sí.
- La información almacenada se pierde sólo cuando los tres dispositivos se bloquean a la vez.
- ¿Cuál es la probabilidad de que no se pierda la información?

4. Reglas de probabilidad
Ejemplo 2.18 (Disco duro) (solución)

- $A = El\ disco\ duro\ se\ bloquea$
- $B = La\ primera\ copia\ de\ seguridad\ se\ bloquea$
- $C = La\ segunda\ copia\ de\ seguridad\ se\ bloquea$
- $E = Se\ pierde\ la\ información\ (bloqueo\ de\ disco\ y\ copias)$
- $\bar{E} = No\ se\ pierde\ la\ información$
- $P\{A\} = 0.01,\ P\{B\} = 0.02,\ P\{C\} = 0.02$
- El enunciado indica que son sucesos independientes
- $P\{E\} = \{A \cap B \cap C\} = P\{A\} \cdot P\{B\} \cdot P\{C\} = (0.01)(0.02)(0.02) = 0.000004$
- $P\{\bar{E}\} = 1 - P\{E\} = 1 - 0.000004 = \mathbf{0.999996}$

4. Reglas de probabilidad
Ejemplo 2.20 (Fiabilidad)

- Calcular la fiabilidad del sistema de la figura 2.3 si cada componente funciona correctamente con probabilidad 0.92 independientemente de los otros componentes.
- La fiabilidad de un sistema es la probabilidad de que funcione correctamente
  - Cuando los componentes del sistema están conectados en paralelo, es suficiente que al menos un componente funcione para que todo el sistema funcione. Ejemplo: sistema de copias de seguridad en una empresa.
  - Cuando los componentes del sistema están conectados en serie, es suficiente que al menos un componente falle para que todo el sistema falle. Ejemplo: el procesador y la memoria interna de un teléfono móvil.

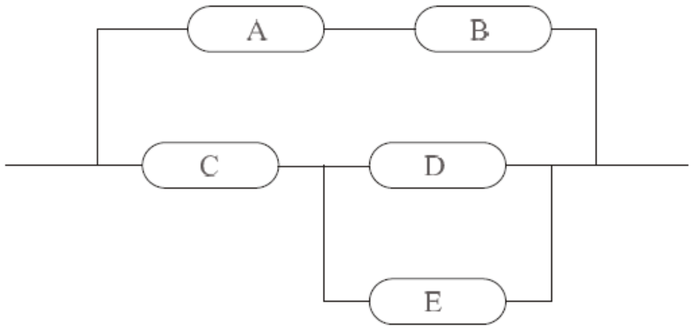
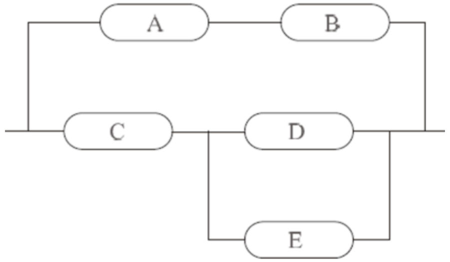


FIGURE 2.3: *Calculate reliability of this system (Example 2.20).*

4. Reglas de probabilidad
Ejemplo 2.20 (Fiabilidad) (solución)

- $P\{A\} = P\{B\} = P\{C\} = P\{D\} = P\{E\} = 0.92$
- El sistema funciona si funcionan (A y B) o (C y (D o E))



- Fiabilidad
  - $Fiabilidad = \; P\left\{\{A \cap B\} \cup \left\{C \cap \{D \cup E\}\right\}\right\}$
    $= P\{A \cap B\} + P\left\{C \cap \{D \cup E\}\right\} - P\left\{\{A \cap B\} \cap \left\{C \cap \{D \cup E\}\right\}\right\}$
    $= P\{A\} \cdot P\{B\} + P\{C\} \cdot P\{D \cup E\} - P\{A\} \cdot P\{B\} \cdot P\{C\} \cdot P\{D \cup E\}$
  - Como
    - $P\{D \cup E\} = P\{D\} + P\{E\} - P\{D \cap E\} = P\{D\} + P\{E\} - P\{D\} \cdot P\{E\} = 0.92 + 0.92 - 0.92 \cdot 0.92 = 0.9936$
  - Entonces
    - $Fiabilidad = 0.92 \cdot 0.92 + 0.92 \cdot 0.9936 - 0.92 \cdot 0.92 \cdot 0.92 \cdot 09936 = \mathbf{0.9868}$

4. Reglas de probabilidad
Ejercicios propuestos

- Ejercicios 2.2, 2.3, 2.4(a,b,c,d), 2.5, 2.8 a 2.13 del libro
  - Las respuestas de 2.3, 2.8, 2.9, 2.12, 2.13 están disponibles en el libro

- Otros ejercicios resueltos:
  - Proyecto Descartes

5. Probabilidad condicional

- La probabilidad condicional de un suceso A respecto de un suceso B es la probabilidad de que ocurra el suceso A si ya ha ocurrido el suceso B
- $P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}$
- Ejemplo
  - $A = Obtener\ cruz\ al\ lanzar\ una\ moneda$
  - $B = Obtener\ cara\ al\ lanzar\ una\ moneda$
  - $P\{A \cap B\} = 0$ por ser sucesos mutuamente excluyentes
  - $P\{B\} = \frac{1}{2} = 0.5$
  - $P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}} = \frac{0}{0.5} = 0$
  - Si ya ha salido cara en la tirada, no es posible que salga cruz en la misma tirada

5. Probabilidad condicional
Ejemplo 2.31 (Vuelos)

- En un aeropuerto el 90% de los vuelos salen a tiempo.
- El 80% de los vuelos llegan a tiempo.
- El 75% de los vuelos salen a tiempo y llegan a tiempo.
- a) Si un vuelo ha salido a tiempo, ¿Cuál es la probabilidad de que llegue a tiempo?
- b) Si un vuelo ha llegado a tiempo, ¿Cuál es la probabilidad de que se saliera a tiempo?
- c) ¿Son los sucesos “salir a tiempo” y “llegar a tiempo” independientes?

5. Probabilidad condicional
Ejemplo 2.31 (Vuelos) (solución)

- $A = Un\ vuelo\ sale\ a\ tiempo$
- $B\ = Un\ vuelo\ llega\ a\ tiempo$
- $P\{A\} = 0.9,\ P\{B\} = 0.8, P\{A \cap B\} = 0.75$
- a) $P\{llega\ a\ tiempo|sale\ a\ tiempo\} = P\{B|A\} = \frac{P\{B \cap A\}}{P\{A\}} = \frac{0.75}{0.9} = 0.8333$
- b) $P\{sale\ a\ tiempo|llega\ a\ tiempo\} = P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}} = \frac{0.75}{0.8} = 0.9375$
- c) ¿Son A y B independientes?
  - $P\{A \cap B\} = 0.75$
  - $P\{A\} \cdot P\{B\} = (0.9)(0.8) = 0.72$
  - No son idependientes porque $P\{A \cap B\} \neq P\{A\} \cdot P\{B\}$

5. Probabilidad condicional
Regla de Bayes

- Regla de Bayes
  - $P\{B|A\} = \frac{P\{A|B\} \cdot P\{B\}}{P\{A\}}$
- Ejemplo
  - $A = Obtener\ cruz\ al\ lanzar\ una\ moneda$
  - $B = Obtener\ cara\ al\ lanzar\ una\ moneda$
  - $P\{A\} = \frac{1}{2} = 0.5$
  - $P\{B\} = \frac{1}{2} = 0.5$
  - $P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}} = \frac{0}{0.5} = 0$
  - $P\{B|A\} = \frac{P\{A|B\} \cdot P\{B\}}{P\{A\}} = \frac{0 \cdot 0.5}{0.5} = 0$
  - Si ya ha salido cruz en la tirada, no es posible que salga cara en la misma tirada

5. Probabilidad condicional
Ley de la probabilidad total (dos sucesos)

- Ley de la probabilidad total para dos sucesos A y B
  - $P\{A\} = P\{A \cap B\} + P\{A \cap \bar{B}\} = P\{A|B\} \cdot P\{B\} + P\{A|\bar{B}\} \cdot P\{\bar{B}\}$
- Regla de Bayes aplicando la ley de la probabilidad total
  - $P\{B|A\} = \frac{P\{A|B\} \cdot P\{B\}}{P\{A|B\} \cdot P\{B\} + P\{A|\bar{B}\} \cdot P\{\bar{B}\}}$

5. Probabilidad condicional
Ley de la probabilidad total (general)

- En el caso de tener más de un suceso en la condición: $B_1, B_2, \ldots, B_k$
  - Si los sucesos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ forman un espacio muestral $\Omega = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$
  - Si son mutuamente excluyentes entre sí: $P\{B_i \cap B_j\} = 0\ para\ cualquier\ i \neq j$
  - Si son exhaustivos: $\sum_{j=1}^{k} P\{B_j\} = 1$
  - Entonces $P\{A\} = \sum_{j=1}^{k} P\{A \cap B_j\} = \sum_{j=1}^{k} P\{A|B_j\} \cdot P\{B_j\}$

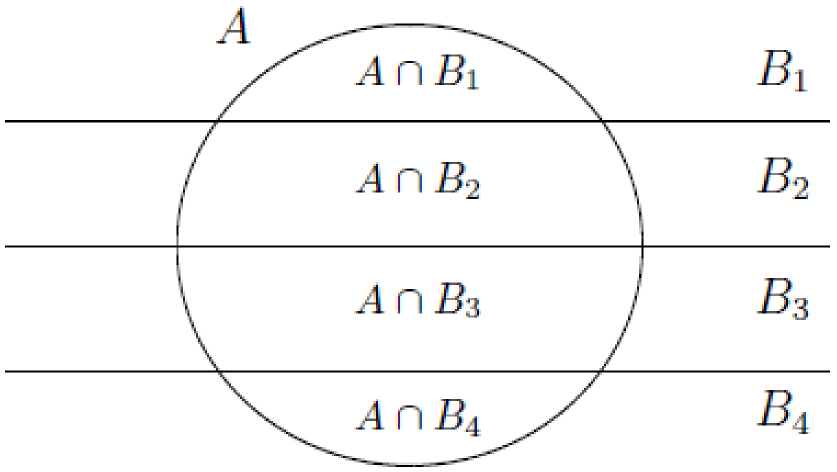


FIGURE 2.6: *Partition of the sample space Ω and the event A.*

5. Probabilidad condicional Ejemplo 2.34 (Virus)

- Se sabe que el 4% de los pacientes de una región tiene un virus.
- Una prueba para detectar el virus en los pacientes es 95% confiable para pacientes infectados y 99% confiable para los sanos.
- Un paciente se realiza la prueba y es positiva.
- ¿Cuál es la probabilidad de que el paciente tenga el virus?

5. Probabilidad condicional Ejemplo 2.34 (Virus) (solución)

- $A = Test\ indica\ que\ hay\ virus$
- $\bar{A} = Test\ indica\ que\ no\ hay\ virus$
- $B\ = Paciente\ tiene\ el\ virus$
- $\bar{B}\ = Paciente\ no\ tiene\ el\ virus$
- $P\{A|B\} = 0.95$
- $P\{\bar{A}|\bar{B}\} = 0.99$
- $P\{B\} = 0.04$
- Se pide $P\{B|\bar{A}\}$
  - $P\{\bar{B}\} = 1 - P\{B\} = 1 - 0.04 = 0.96$
  - $P\{A|\bar{B}\} = 1 - P\{\bar{A}|\bar{B}\} = 1 - 0.99 = 0.01$
  - $P\{B|\bar{A}\} = \frac{P\{A|B\} \cdot P\{B\}}{P\{A|B\} \cdot P\{B\} + P\{A|\bar{B}\} \cdot P\{\bar{B}\}} = \frac{(0.95)(0.04)}{(0.95)(0.04) + (0.01)(0.96)} = 0.7983$

5. Probabilidad condicional
Ejercicios propuestos

- Ejercicios 2.4(e,f), 2.6, 2.7, 2.15 a 2.24 del libro
  - Las respuestas de 2.7, 2.15, 2.16, 2.18, 2.20, 2.21 y 2.24 están disponibles en el libro

- Otros ejercicios resueltos:
  - Proyecto Descartes

6. Resumen

- La probabilidad es una medida entre 0 y 1 de la certidumbre de que ocurra un suceso (evento) en un experimento aleatorio, siendo un suceso un conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio
- La combinatoria consiste en operaciones de conteo, como permutaciones (variaciones) o combinaciones, que se pueden utilizar para el cálculo de probabilidades contando resultados equiprobables de un experimento aleatorio
- Los sucesos son conjuntos y se puede calcular la probabilidad de sucesos que se forman con la unión, intersección, complemento y diferencia de otros sucesos
- Dos sucesos son independientes cuando la ocurrencia de uno de ellos no influye en la ocurrencia o no de otro
- La probabilidad condicional de un suceso (posterior) respecto a otro suceso (anterior), es la probabilidad de que ocurra el suceso posterior si ya ha ocurrido el suceso anterior
- La Regla o Teorema de Bayes establece cómo calcular la probabilidad de un suceso anterior, conociendo la probabilidad de un suceso posterior
- La Ley o Teorema de la Probabilidad Total establece que la probabilidad de un suceso puede calcularse en función de sus probabilidades condicionales respecto a un conjunto de otros sucesos que sean exhaustivos y mutuamente excluyentes