

Probabilidad y combinatoria

Contenidos adaptados del libro "Probability and statistics for computer scientists, Second edition, M. Baron" (Capítulo 2)

Contenidos

1. Objetivos
2. Conceptos previos
3. Combinatoria
4. Reglas de probabilidad
5. Probabilidad condicional
6. Resumen

1. Objetivos

- Recordar conceptos previos del ámbito de la probabilidad, como experimento aleatorio, resultado de un experimento, espacio muestral, suceso y probabilidad de un suceso
- Diferenciar entre sucesos dependientes e independientes
- Calcular la probabilidad de sucesos
- Aplicar la combinatoria para el cálculo de probabilidades

2. Conceptos previos

Experimento aleatorio

- La Teoría de la Probabilidad es la rama de las Matemáticas que estudia los experimentos o fenómenos aleatorios.
 - Experimento aleatorio es aquel en el que existe incertidumbre sobre el resultado que se obtendrá.
 - Si lo repetimos con las mismas condiciones iniciales no garantiza los mismos resultados.
 - Ejemplos: Lanzamiento de un dado, lanzamiento de una moneda, extracción de una carta de una baraja, partido de fútbol.
 - Experimento determinista es aquel en el que si se repiten las mismas condiciones iniciales se garantiza el mismo resultado.
 - Ejemplos: Calcular el espacio que recorre un objeto que circula a una velocidad constante durante un determinado tiempo, calcular la puntuación de un examen con ninguna respuesta correcta.

2. Conceptos previos

Espacio muestral y suceso

- El conjunto de todos los posibles **resultados** elementales (ω_i) de un **experimento aleatorio**, se llama **espacio muestral** (Ω)
 - Ejemplo: Un experimento puede ser "lanzar tres monedas", el espacio muestral incluye 8 posibles resultados
 - Nota: Cara = C, Cruz = X
 - Espacio muestral: $\Omega = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$
 - Resultados: $\omega_1 = CCC, \dots, \omega_8 = XXX$
- Cualquier conjunto de resultados es un **suceso (evento)**. Por lo tanto, los sucesos son subconjuntos del espacio muestral.
 - Ejemplos de sucesos:
 - *Obtener tres caras* = $\{CCC\}$
 - *Obtener sólo una cruz* = $\{CCX, CXC, XCC\}$
 - *Obtener mismo lado en todas las monedas* = $\{CCC, XXX\}$
 - ...
 - Pueden formarse hasta 2^{N_T} sucesos, siendo N_T el tamaño total del espacio muestral (ej. 256 si $N_T = 8$)
- Lo **resultados** pueden denominarse también **sucesos elementales**

2. Conceptos previos

Probabilidad

- La probabilidad es una medida de la certidumbre de que ocurra un suceso en un experimento aleatorio.
 - Su valor es un número entre 0 y 1
 - Si es 0 se trata de un suceso imposible
 - Si es 1 se trata de un suceso seguro
 - Ejemplo: si la probabilidad de un suceso es 0.25, quiere decir que:
 - si se repite el experimento muchas veces, lo normal es que 25% de las veces ocurra ese suceso
 - es decir, de cada 100 veces que se repita el experimento, lo normal es que el suceso ocurra 25 veces

2. Conceptos previos

Propiedades de un espacio muestral

- En un espacio muestral con un total N_T resultados posibles:
 - $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N_T}\}$
- Se cumple:
 - Es exhaustivo
 - $P\{\Omega\} = \sum_{k=1}^{N_T} P\{\omega_k\} = 1$
 - Los resultados son mutuamente excluyentes
 - $P\{\omega_i, \omega_j\} = 0$ para cada $i \neq j$

2. Conceptos previos

Probabilidad (con resultados equiprobables)

- Cuando todos los N_T posibles resultados ω_k del espacio muestral tienen la misma probabilidad $P\{\omega_k\}$ de que ocurran
 - $P\{\omega_k\} = \frac{1}{N_T}$ para cualquier k
 - $\sum_{k=1}^{N_T} P\{\omega_k\} = 1$
- Regla de Laplace: probabilidad de que ocurra un suceso o evento E :
 - $P\{E\} = \frac{\text{Número de resultados (favorables) en el suceso } E}{\text{Número total de resultados en el espacio muestral } \Omega} = \frac{N_F}{N_T}$
- Ejemplo
 - $E = \text{Obtener mismo lado en todas las monedas al lanzar 3 monedas a la vez}$
 - $\Omega = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$
 - $E = \{CCC, XXX\}$
 - $N_F = 2$
 - $N_T = 8$
 - $P\{E\} = \frac{2}{8} = 0.25$

2. Conceptos previos

Probabilidad (con resultados no equiprobables)

- Cuando no todos los resultados del espacio muestral tienen la misma probabilidad de que ocurran
 - $P\{\omega_k\} \neq \frac{1}{N_T}$ para cualquier k
 - $\sum_{k=1}^{N_T} P\{\omega_k\} = 1$
- Hay que repetir el experimento n veces y apuntar la frecuencia o número de veces f_E que ocurre el suceso E
 - Cuando se repite el experimento muchas veces la probabilidad coincide con la frecuencia relativa
 - $P\{E\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_E}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{rE}$
- Ejemplo (datos reales de footystats):
 - $E = \text{El Rayo Vallecano gana al Real Madrid}$
 - $n = 18$
 - $f_E = 2$ (El Rayo ha ganado 2 de los últimos 18 partidos)
 - $P\{E\} = \frac{2}{18} = 0.11$



Imagen: [footystats](#)

2. Conceptos previos

Probabilidad. Ejemplo fútbol

- $\Omega = \{Rayo\ gana, Rayo\ pierde, empate\}$
 - $\omega_1 = Rayo\ gana$
 - $\omega_2 = Rayo\ pierde$
 - $\omega_3 = Empate$
- Si fueran resultados equiprobables
 - $P\{\omega_1\} = P\{\omega_2\} = P\{\omega_3\} = \frac{1}{3}$
- Pero no lo son, dependen del presupuesto de cada equipo, calidad de los jugadores, etc., por lo que se calcula utilizando la historia anterior conocida
 - $P\{\omega_1\} = \frac{2}{18} = 0.11$
 - $P\{\omega_2\} = \frac{14}{18} = 0.78$
 - $P\{\omega_3\} = \frac{2}{18} = 0.11$
- Pero siempre se cumple: $P\{\omega_1\} + P\{\omega_2\} + P\{\omega_3\} = 1$
 - $\Omega = \{Rayo\ gana, Rayo\ pierde, empate\}$
 - $\omega_1 = Rayo\ gana$
 - $\omega_2 = Rayo\ pierde$
 - $\omega_3 = Empate$
 - Si fueran resultados equiprobables
 - $P\{\omega_1\} = P\{\omega_2\} = P\{\omega_3\} = \frac{1}{3}$
 - Pero no lo son, dependen del presupuesto de cada equipo, calidad de los jugadores, etc., por lo que se calcula utilizando la historia anterior conocida
 - $P\{\omega_1\} = \frac{2}{18} = 0.11$
 - $P\{\omega_2\} = \frac{14}{18} = 0.78$
 - $P\{\omega_3\} = \frac{2}{18} = 0.11$
 - Pero siempre se cumple: $P\{\omega_1\} + P\{\omega_2\} + P\{\omega_3\} = 1$

Imagen: [footystats](#)

2. Conceptos previos

Sucesos dependientes e independientes

- Dos sucesos son independientes cuando la ocurrencia de uno de ellos no influye en la ocurrencia o no de otro
 - Ejemplo: Urna con 3 bolas negras y 1 bola verde. Primero se extra una bola, se devuelve a la urna, y luego se extrae otra bola.
 - Los sucesos “Primera bola verde” y “Segunda bola verde” son independientes
 - $P\{\text{Segunda bola verde}\} = \frac{1}{4} = 0.25$ En cualquier caso
- Dos sucesos son dependientes cuando la ocurrencia de uno de ellos influye en la ocurrencia del otro
 - Ejemplo: Urna con 3 bolas negras y 1 bola verde. Primero se extra una bola, NO se devuelve a la urna, y luego se extrae otra bola.
 - Los sucesos “Primera bola verde” y “Segunda bola verde” son dependientes
 - $P\{\text{Segunda bola verde}\} = \frac{0}{3} = 0$ Si ocurrió el suceso “Primera bola verde”
 - $P\{\text{Segunda bola verde}\} = \frac{1}{3} = 0.34$ Si no ocurrió el suceso “Primera bola verde”

3. Combinatoria

- Regla de Laplace: probabilidad de que ocurra un suceso o evento E en un experimento con resultados equiprobables:
 - $$P\{E\} = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número total de resultados}} = \frac{N_F}{N_T}$$
- Cuando el número de resultados totales o favorables es grande, hay que aplicar combinatoria para contabilizar las posibles combinaciones
- Ejemplo:
 - Probabilidad de que al comprar un billete de lotería de 5 cifras elegido al azar no tenga ninguna cifra repetida
 - $$P\{E\} = \frac{\text{Número de billetes de lotería de 5 cifras con ninguna repetida}}{\text{Número total de billetes de loteria con 5 cifras}}$$

3. Combinatoria

Operaciones de conteo: permutaciones y combinaciones

- Se trata de contar el número de grupos de k elementos que se pueden formar, a partir de un conjunto de n posibles elementos
- Ejemplo: Se dispone de $n=3$ letras A, B, C y se quieren formar grupos de $k=2$ letras
- **Permutaciones (o variaciones):** El orden de los elementos sí importa
 - Ejemplo: No es igual "AB" que "BA" y se cuentan como 2 grupos diferentes
 - Permutaciones con repetición (o reposición): se pueden repetir elementos iguales en cada grupo
 - Ejemplo: El número de permutaciones con repetición es 9 \rightarrow AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC
 - Permutaciones sin repetición (o reposición): no se pueden repetir elementos
 - Ejemplo: El número de permutaciones sin repetición es 6 \rightarrow AB, AC, BA, BC, CB
- **Combinaciones:** El orden de los elementos no importa
 - Ejemplo: Es igual "AB" que "BA" y se cuenta como 1 grupo
 - Combinaciones con repetición (o reposición)
 - Ejemplo: El número de combinaciones con repetición es 6 \rightarrow AA, AB, AC, BB, BC, CC
 - Combinaciones sin repetición (o reposición)
 - Ejemplo: El número de combinaciones sin repetición es 3 \rightarrow AB, AC, BC

3. Combinatoria

Operaciones de conteo: Fórmulas

Operación	Importa el orden de los elementos	Se pueden repetir los elementos	Fórmula
PERMUTACIONES o VARIACIONES	Si	Si	$P_r(n, k) = n \cdot n \cdots n = n^k$
		No	$P(n, k) = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$
COMBINACIONES	No	Si	$C_r(n, k) = \binom{k + n - 1}{k} = \frac{(k + n - 1)!}{k! (n - 1)!}$
		No	$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$

NOTA: $n!$ = factorial del número entero $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$, siendo $0! = 1$

3. Combinatoria

Ejemplo 2.28 (Permutaciones sin repetición)

- ¿De cuantas formas se pueden sentar 10 estudiantes en una clase con 15 sillas?

- Solución

- $n = 15$ sillas
- $k = 10$ estudiantes
- Las 15 sillas pueden asimilarse a letras:
 - A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O
 - Hay que formar grupos de 10 letras
- Sí importa el orden
- No puede haber repetición
- Por tanto, son PERMUTACIONES SIN REPETICIÓN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
B	A	C	D	E	F	G	H	I	J
...									
F	G	H	I	J	K	L	M	N	O

$$\begin{aligned} P(n, k) &= \frac{n!}{(n-k)!} = P(15, 10) = \frac{15!}{(15-10)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \\ &= 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 = 10897286400 \text{ formas diferentes} \end{aligned}$$

3. Combinatoria

Ejemplo 2.27 (Permutaciones con repetición)

- En un sitio web se exige una password de 8 caracteres
- Se pueden usar dígitos de 0 a 9, y letras mayúsculas y minúsculas, teniendo en cuenta un alfabeto de 26 letras
- Un programa espía puede probar 1 millón de passwords en 1 segundo
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que el programa adivine la password en una semana?
 - b) ¿Cuánto tardará como máximo en adivinar la password? Calcularlo usando la la probabilidad obtenida en el apartado anterior

3. Combinatoria

Ejemplo 2.27 (Solución)

- $n = 10$ dígitos + 26 letras may. + 26 letras min. = 62
- $k = 8$ caracteres de la password
- $E =$ Adivinar la password en un intento
 - $P\{E\} = \frac{N_F}{N_T} = \frac{1}{P_r(62,8)} = \frac{1}{62^8} = \frac{1}{218340105584896}$
- a) Al ritmo de 1M intentos por segundo, en una semana se realizan:
 - $1000000 \text{ int/s} * 60\text{s/min} * 60\text{min/h} * 24\text{h/d} * 7\text{d/sem} = 604800000000 \text{ intentos}$
 - $P\{\text{Adivinar en 1 semana}\} = 604800000000 \cdot P\{E\} = 604800000000 \cdot \frac{1}{218340105584896} = 0.00277$
- b) Se trata de conseguir un suceso seguro, con probabilidad 1
 - $P\{\text{acertar seguro}\} = 1 = n^\circ \text{ de semanas} \cdot P\{\text{Adivinar en 1 semana}\}$
 - $n^\circ \text{ de semanas} = \frac{1}{P\{\text{Adivinar en 1 semana}\}} = \frac{1}{0.00277} = 361 \text{ semanas} \approx 7 \text{ años}$

3. Combinatoria

Ejemplo 2.29 (Combinaciones sin repetición)

- Un programa antivirus detecta que 3 carpetas en un ordenador, de un total de 10, están infectadas.
- Las 10 carpetas se denominan A, B, C, D, E, F, G, H, I, J
- ¿Cuál es la probabilidad de que estén infectadas las carpetas C, F y G?

3. Combinatoria

Ejemplo 2.29 (Solución)

- *Carpetas = A, B, C, D, E, F, G, H, I, J*
- *n = 10 carpetas en el ordenador*
- *k = 3 carpetas infectadas*

- $P\{\text{Infectadas } C, F \text{ y } G\} = \frac{N_F}{N_T} = \frac{1}{C(10,3)} = \frac{1}{120} = 0.0083$

- $C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{720}{6} = 120$

- **NOTA:**

- No son permutaciones porque el orden no importa: ABC=ACB=BAC=BCA=CAB=CBA
 - Se usan combinaciones sin repetición porque no se pueden repetir las carpetas, es decir, no puede ocurrir AAB, AAA, ABB, ...

3. Combinatoria

Ejemplo (Combinaciones con repetición)

- ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar simultáneamente tres monedas iguales se obtenga una cara y dos cruces?

- Solución

- $P\{1 \text{ cara y } 2 \text{ cruces}\} = \frac{N_F}{N_T} = \frac{1}{C_r(2,3)} = \frac{1}{4} = 0.25$

- $C_r(n, k) = \binom{k+n-1}{k} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(3+2-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{4}{1} = 4$

- Interpretación:

- Hay 4 casos posibles: 3 caras, 2 caras y 1 cruz, 1 cara y 2 cruces, 3 cruces
 - Son combinaciones porque no importa el orden de las caras y cruces, al lanzar las monedas a la vez
 - Hay repetición porque puede haber más de una cara o de una cruz

3. Combinatoria

Ejercicios propuestos

- Ejercicios 2.14, 2.25 a 2.29 del libro
 - Las respuestas de 2.26 y 2.28 están disponibles en el libro
- Otros ejercicios resueltos:
 - Proyecto Descartes

4. Reglas de probabilidad

- Un suceso es un conjunto de resultados
 - Ejemplo: suceso $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$
- Por lo que se pueden aplicar operaciones con conjuntos
 - Ejemplo: sucesos A y B
 - Unión de sucesos: $A \cup B$
 - Intersección de sucesos: $A \cap B$
 - Complemento de un suceso: \bar{A}
 - Diferencia de sucesos: $A \setminus B$ ó $A - B$

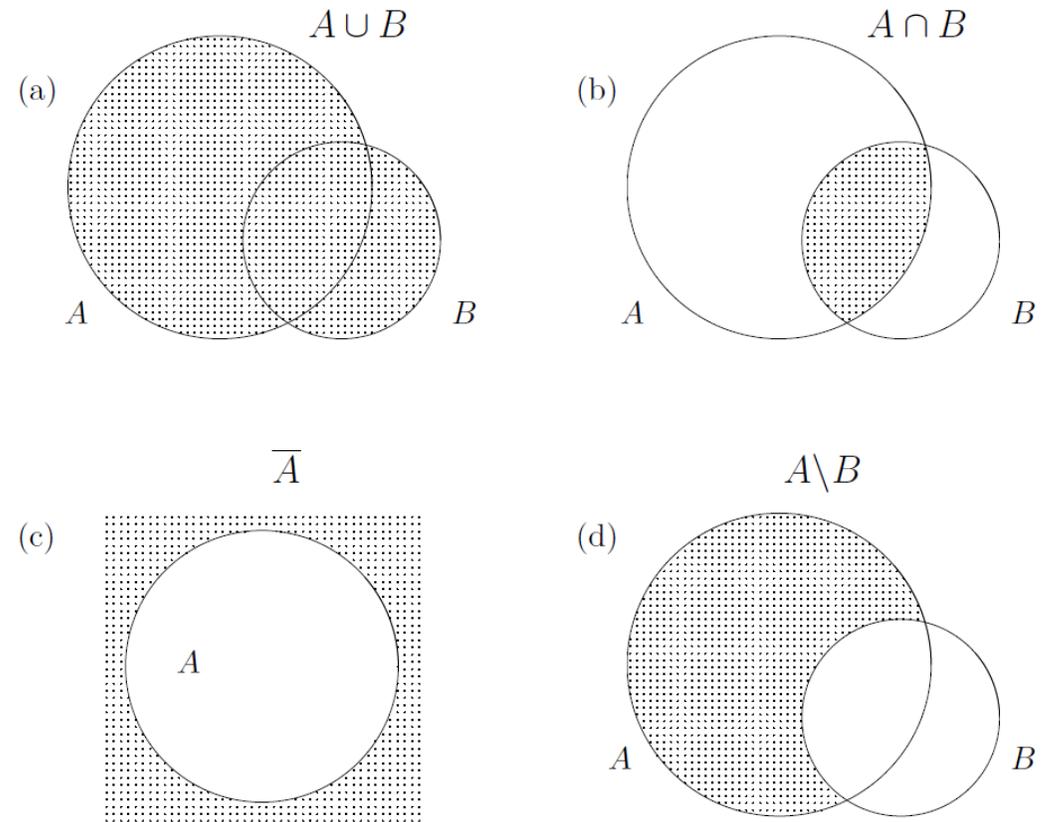


FIGURE 2.1: Venn diagrams for (a) union, (b) intersection, (c) complement, and (d) difference of events.

4. Reglas de probabilidad

Probabilidad de la intersección de sucesos

- $P\{A \cap B\} =$ Probabilidad de que ocurra el suceso A y el suceso B
- Si los sucesos son mutuamente excluyentes (incompatibles o disjuntos)
 - $P\{A \cap B\} = 0$
 - Ejemplo:
 - $A =$ Obtener cruz al lanzar una moneda
 - $B =$ Obtener cara al lanzar una moneda
- Si los sucesos A y B son independientes (la ocurrencia de uno de ellos no influye en la ocurrencia o no del otro)
 - $P\{A \cap B\} = P\{A\} \cdot P\{B\}$
 - Ejemplo:
 - $A =$ Obtener cruz al lanzar una moneda
 - $B =$ Obtener 4 puntos al lanzar un dado
 - $P\{A\} = \frac{1}{2} = 0.5$
 - $P\{B\} = \frac{1}{6} = 0.17$
 - $P\{A \cap B\} = P\{A\} \cdot P\{B\} = (0.5)(0.17) = 0.085$



Imágenes: soyvisual.org

4. Reglas de probabilidad

Probabilidad de la unión de sucesos

- $P\{A \cup B\} =$ Probabilidad de que ocurra el suceso A o el suceso B
- $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}$
- Ejemplo
 - $A =$ Obtener cruz al lanzar una moneda
 - $B =$ Obtener cara al lanzar una moneda
 - $P\{A\} = \frac{1}{2} = 0.5$
 - $P\{B\} = \frac{1}{2} = 0.5$
 - $P\{A \cap B\} = 0$ por ser mutuamente excluyentes
 - $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\} = 0.5 + 0.5 + 0 = 1$

4. Reglas de probabilidad

Probabilidad del complemento de un suceso

- $P\{\bar{A}\} = \text{Probabilidad de que no ocurra el suceso } A$
- $P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}$
- Ejemplo:
 - $A = \text{Obtener 4 puntos al lanzar un dado}$
 - $\bar{A} = \text{No obtener 4 puntos al lanzar un dado}$
 - $P\{A\} = \frac{1}{6} = 0.17$
 - $P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0.83$



Imagen: soyvisual.org

4. Reglas de probabilidad

Probabilidad de la diferencia de sucesos

- $P\{A \setminus B\} = P\{A - B\} =$
Probabilidad de que ocurra el suceso A pero no el suceso B
- $P\{A - B\} = P\{A\} - P\{A \cap B\}$
- Ejemplo
 - $A =$ *Obtener cruz al lanzar una moneda*
 - $B =$ *Obtener cara al lanzar una moneda*
 - $P\{A\} = \frac{1}{2} = 0.5$
 - $P\{A \cap B\} = 0$ por ser mutuamente excluyentes
 - $P\{A - B\} = P\{A\} - P\{A \cap B\} = 0.5 - 0 = 0.5$

4. Reglas de probabilidad

Ejemplo 2.18 (Disco duro)

- Hay un 1 % de probabilidad de que un disco duro de una empresa se bloquee.
- La empresa guarda dos copias de seguridad, cada una con una probabilidad del 2 % de bloqueo.
- Los tres componentes son independientes entre sí.
- La información almacenada se pierde sólo cuando los tres dispositivos se bloquean a la vez.
- ¿Cuál es la probabilidad de que no se pierda la información?

4. Reglas de probabilidad

Ejemplo 2.18 (Disco duro) (solución)

- $A = \text{El disco duro se bloquea}$
- $B = \text{La primera copia de seguridad se bloquea}$
- $C = \text{La segunda copia de seguridad se bloquea}$
- $E = \text{Se pierde la información (bloqueo de disco y copias)}$
- $\bar{E} = \text{No se pierde la información}$
- $P\{A\} = 0.01, P\{B\} = 0.02, P\{C\} = 0.02$
- El enunciado indica que son sucesos independientes
- $P\{E\} = P\{A \cap B \cap C\} = P\{A\} \cdot P\{B\} \cdot P\{C\} = (0.01)(0.02)(0.02) = 0.000004$
- $P\{\bar{E}\} = 1 - P\{E\} = 1 - 0.000004 = \mathbf{0.999996}$

4. Reglas de probabilidad

Ejemplo 2.20 (Fiabilidad)

- Calcular la fiabilidad del sistema de la figura 2.3 si cada componente funciona correctamente con probabilidad 0.92 independientemente de los otros componentes.
- La fiabilidad de un sistema es la probabilidad de que funcione correctamente
 - Cuando los componentes del sistema están conectados en paralelo, es suficiente que al menos un componente funcione para que todo el sistema funcione. Ejemplo: sistema de copias de seguridad en una empresa.
 - Cuando los componentes del sistema están conectados en serie, es suficiente que al menos un componente falle para que todo el sistema falle. Ejemplo: el procesador y la memoria interna de un teléfono móvil.

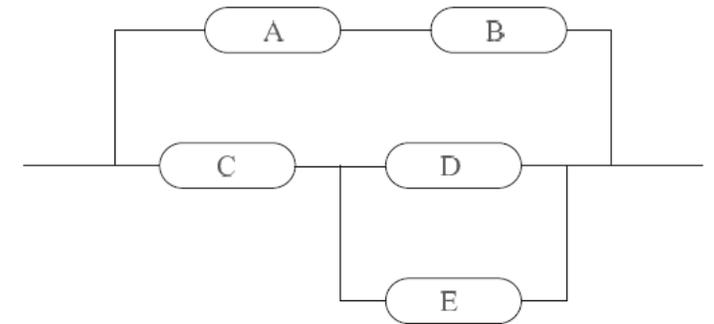
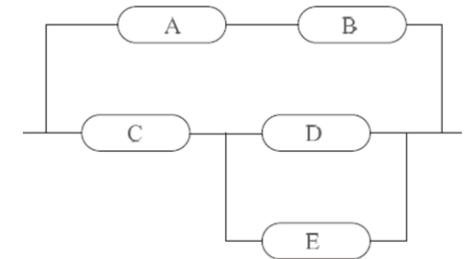


FIGURE 2.3: Calculate reliability of this system (Example 2.20).

4. Reglas de probabilidad

Ejemplo 2.20 (Fiabilidad) (solución)

- $P\{A\} = P\{B\} = P\{C\} = P\{D\} = P\{E\} = 0.92$
- El sistema funciona si funcionan (A y B) o (C y (D o E))
- Fiabilidad



$$\begin{aligned} \text{Fiabilidad} &= P\left\{\{A \cap B\} \cup \{C \cap \{D \cup E\}\}\right\} \\ &= P\{A \cap B\} + P\{C \cap \{D \cup E\}\} - P\left\{\{A \cap B\} \cap \{C \cap \{D \cup E\}\}\right\} \\ &= P\{A\} \cdot P\{B\} + P\{C\} \cdot P\{D \cup E\} - P\{A\} \cdot P\{B\} \cdot P\{C\} \cdot P\{D \cup E\} \end{aligned}$$

- Como

$$P\{D \cup E\} = P\{D\} + P\{E\} - P\{D \cap E\} = P\{D\} + P\{E\} - P\{D\} \cdot P\{E\} = 0.92 + 0.92 - 0.92 \cdot 0.92 = 0.9936$$

- Entonces

$$\text{Fiabilidad} = 0.92 \cdot 0.92 + 0.92 \cdot 0.9936 - 0.92 \cdot 0.92 \cdot 0.92 \cdot 0.9936 = \mathbf{0.9868}$$

4. Reglas de probabilidad

Ejercicios propuestos

- Ejercicios 2.2, 2.3, 2.4(a,b,c,d), 2.5, 2.8 a 2.13 del libro
 - Las respuestas de 2.3, 2.8, 2.9, 2.12, 2.13 están disponibles en el libro
- Otros ejercicios resueltos:
 - Proyecto Descartes

5. Probabilidad condicional

- La probabilidad condicional de un suceso A respecto de un suceso B es la probabilidad de que ocurra el suceso A si ya ha ocurrido el suceso B

- $$P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}$$

- Ejemplo

- $A =$ Obtener cruz al lanzar una moneda

- $B =$ Obtener cara al lanzar una moneda

- $P\{A \cap B\} = 0$ por ser sucesos mutuamente excluyentes

- $P\{B\} = \frac{1}{2} = 0.5$

- $P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}} = \frac{0}{0.5} = 0$

- Si ya ha salido cara en la tirada, no es posible que salga cruz en la misma tirada

5. Probabilidad condicional

Ejemplo 2.31 (Vuelos)

- En un aeropuerto el 90% de los vuelos salen a tiempo.
- El 80% de los vuelos llegan a tiempo.
- El 75% de los vuelos salen a tiempo y llegan a tiempo.
- a) Si un vuelo ha salido a tiempo, ¿Cuál es la probabilidad de que llegue a tiempo?
- b) Si un vuelo ha llegado a tiempo, ¿Cuál es la probabilidad de que saliera a tiempo?
- c) ¿Son los sucesos “salir a tiempo” y “llegar a tiempo” independientes?

5. Probabilidad condicional

Ejemplo 2.31 (Vuelos) (solución)

- $A = \text{Un vuelo sale a tiempo}$
- $B = \text{Un vuelo llega a tiempo}$
- $P\{A\} = 0.9, P\{B\} = 0.8, P\{A \cap B\} = 0.75$
- a) $P\{\text{llega a tiempo} | \text{sale a tiempo}\} = P\{B|A\} = \frac{P\{B \cap A\}}{P\{A\}} = \frac{0.75}{0.9} = 0.8333$
- b) $P\{\text{sale a tiempo} | \text{llega a tiempo}\} = P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}} = \frac{0.75}{0.8} = 0.9375$
- c) ¿Son A y B independientes?
 - $P\{A \cap B\} = 0.75$
 - $P\{A\} \cdot P\{B\} = (0.9)(0.8) = 0.72$
 - No son independientes porque $P\{A \cap B\} \neq P\{A\} \cdot P\{B\}$

5. Probabilidad condicional

Regla de Bayes

- Regla de Bayes

- $P\{B|A\} = \frac{P\{A|B\} \cdot P\{B\}}{P\{A\}}$

- Ejemplo

- $A = \text{Obtener cruz al lanzar una moneda}$

- $B = \text{Obtener cara al lanzar una moneda}$

- $P\{A\} = \frac{1}{2} = 0.5$

- $P\{B\} = \frac{1}{2} = 0.5$

- $P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}} = \frac{0}{0.5} = 0$

- $P\{B|A\} = \frac{P\{A|B\} \cdot P\{B\}}{P\{A\}} = \frac{0 \cdot 0.5}{0.5} = 0$

- Si ya ha salido cruz en la tirada, no es posible que salga cara en la misma tirada

5. Probabilidad condicional

Ley de la probabilidad total (dos sucesos)

- Ley de la probabilidad total para dos sucesos A y B

- $P\{A\} = P\{A \cap B\} + P\{A \cap \bar{B}\} = P\{A|B\} \cdot P\{B\} + P\{A|\bar{B}\} \cdot P\{\bar{B}\}$

- Regla de Bayes aplicando la ley de la probabilidad total

- $$P\{B|A\} = \frac{P\{A|B\} \cdot P\{B\}}{P\{A|B\} \cdot P\{B\} + P\{A|\bar{B}\} \cdot P\{\bar{B}\}}$$

5. Probabilidad condicional

Ley de la probabilidad total (general)

- En el caso de tener más de un suceso en la condición: B_1, B_2, \dots, B_k
 - Si los sucesos B_1, B_2, \dots, B_k forman un espacio muestral $\Omega = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$
 - Si son mutuamente excluyentes entre sí: $P\{B_i \cap B_j\} = 0$ para cualquier $i \neq j$
 - Si son exhaustivos: $\sum_{j=1}^k P\{B_j\} = 1$
 - Entonces $P\{A\} = \sum_{j=1}^k P\{A \cap B_j\} = \sum_{j=1}^k P\{A|B_j\} \cdot P\{B_j\}$

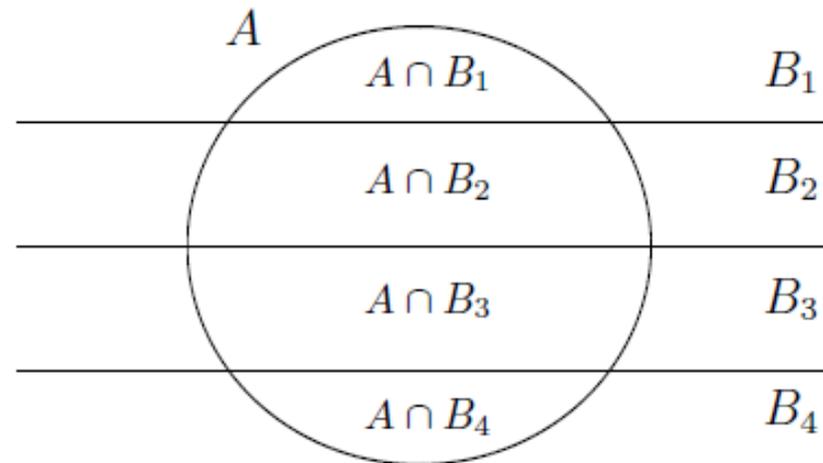


FIGURE 2.6: Partition of the sample space Ω and the event A .

5. Probabilidad condicional

Ejemplo 2.34 (Virus)

- Se sabe que el 4% de los pacientes de una región tiene un virus.
- Una prueba para detectar el virus en los pacientes es 95% confiable para pacientes infectados y 99% confiable para los sanos.
- Un paciente se realiza la prueba y es positiva.
- ¿Cuál es la probabilidad de que el paciente tenga el virus?

5. Probabilidad condicional

Ejemplo 2.34 (Virus) (solución)

- $A = \text{Test indica que hay virus}$
- $\bar{A} = \text{Test indica que no hay virus}$
- $B = \text{Paciente tiene el virus}$
- $\bar{B} = \text{Paciente no tiene el virus}$
- $P\{A|B\} = 0.95$
- $P\{\bar{A}|\bar{B}\} = 0.99$
- $P\{B\} = 0.04$
- Se pide $P\{B|\bar{A}\}$
 - $P\{\bar{B}\} = 1 - P\{B\} = 1 - 0.04 = 0.96$
 - $P\{A|\bar{B}\} = 1 - P\{\bar{A}|\bar{B}\} = 1 - 0.99 = 0.01$
 - $$P\{B|\bar{A}\} = \frac{P\{A|B\} \cdot P\{B\}}{P\{A|B\} \cdot P\{B\} + P\{A|\bar{B}\} \cdot P\{\bar{B}\}} = \frac{(0.95)(0.04)}{(0.95)(0.04) + (0.01)(0.96)} = 0.7983$$

5. Probabilidad condicional

Ejercicios propuestos

- Ejercicios 2.4(e,f), 2.6, 2.7, 2.15 a 2.24 del libro
 - Las respuestas de 2.7, 2.15, 2.16, 2.18, 2.20, 2.21 y 2.24 están disponibles en el libro
- Otros ejercicios resueltos:
 - Proyecto Descartes
 - wpd.ugr.es

6. Resumen

- La probabilidad es una medida entre 0 y 1 de la certidumbre de que ocurra un suceso (evento) en un experimento aleatorio, siendo un suceso un conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio
- La combinatoria consiste en operaciones de conteo, como permutaciones (variaciones) o combinaciones, que se pueden utilizar para el cálculo de probabilidades contando resultados equiprobables de un experimento aleatorio
- Los sucesos son conjuntos y se puede calcular la probabilidad de sucesos que se forman con la unión, intersección, complemento y diferencia de otros sucesos
- Dos sucesos son independientes cuando la ocurrencia de uno de ellos no influye en la ocurrencia o no de otro
- La probabilidad condicional de un suceso (posterior) respecto a otro suceso (anterior), es la probabilidad de que ocurra el suceso posterior si ya ha ocurrido el suceso anterior
- La Regla o Teorema de Bayes establece cómo calcular la probabilidad de un suceso anterior, conociendo la probabilidad de un suceso posterior
- La Ley o Teorema de la Probabilidad Total establece que la probabilidad de un suceso puede calcularse en función de sus probabilidades condicionales respecto a un conjunto de otros sucesos que sean exhaustivos y mutuamente excluyentes